

LUNDS UNIVERSITETS ÅRSSKRIFT. N. F. Avd. 2. Bd 15. Nr 4.
KUNGL. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS HANDLINGAR. N. F. Bd 80. Nr 4.

SUR LE THÉORÈME DE CONDENSATION DE CAUCHY

PAR

THORILD DAHLGREN

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LUND

ET PUBLIQUEMENT SOUTENUE LE SAMEDI 21 SEPTEMBRE 1918 À 10 HEURES DU MATIN

DANS LA SALLE No VII



LUND

C. W. K. GLEERUP

LEIPZIG

OTTO HARRASSOWITZ

LUNDS UNIVERSITETS ÅRSSKRIFT. N. F. Avd. 2. Bd 15. Nr 4.
KUNGL. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS HÅNDLINGAR. N. F. Bd 30. Nr 4.

SUR LE THÉORÈME DE CONDENSATION DE CAUCHY

PAR

THORILD DAHLGREN



LUND
C. W. K. GLEERUP

LEIPZIG
OTTO HARRASSOWITZ

Présenté dans la séance du 8 mai 1918.

LUND 1918
IMPRIMERIE HÅKAN OHLSSON

À LA MÉMOIRE DE MA MÈRE

Introduction.

Dans son *Cours d'Analyse*, CAUCHY¹ a démontré un théorème qu'on a souvent appelé le *théorème de condensation de CAUCHY* et auquel on donne généralement la forme suivante:

»Soit une série à termes positifs et décroissants

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n);$$

elle converge et diverge en même temps que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n f(a^n),$$

si l'on a $a > 1$.»

L'importance de ce théorème résulte de ce qu'il nous donne des renseignements définitives sur la convergence d'une infinité de séries, si nous connaissons la convergence d'une seule série. Dans les applications, on emploie avec avantage le critère d'ERMAKOFF², critère simple, qu'on peut appliquer aux séries à termes positifs et décroissants. Donc, le problème de convergence de ces séries est, à certains égards, complètement résolu.

De plus, ce théorème forme le point de départ le plus pratique, lorsque on veut établir les critères de convergence de BERTRAND, qu'il obtenait, d'ailleurs, en partant d'un autre théorème de CAUCHY.

Le théorème est susceptible de généralisations dans plusieurs directions. Ainsi, M. GOUWENTAK³ et M. KLUYVER⁴ l'ont étendu aux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} ap^n f(ap^n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a + bn)^{p-1} f((a + bn)^p), \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n f(a_n)$$

et à d'autres semblables (voir ci-dessous, § 18).

¹ *Œuvres complètes*, 2^e sér., t. 3, Paris, 1897, p. 123—124.

² *Caractère de convergence des séries* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 2, 1871, p. 250—256). *Extrait d'une lettre* (ibid., 2^e sér., t. 7, 1883, p. 142—144).

³ *Eene uitbreiding van een tweetal convergentiekenmerken* (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, 2^e sér., t. 8, 1909, p. 370—372).

⁴ *Eene uitbreiding van het convergentiekenmerk van Cauchy* (ibid., p. 373—374).

Mais plus profondes et plus importantes sont les généralisations qu'en a donné M. NÖRLUND dans ses cours universitaires. En remplaçant la fonction a^x par une autre fonction et par sa dérivée, il a déduit plusieurs théorèmes de condensation, ou plutôt théorèmes de transformation, dont le plus important est le suivant, donné, sous une forme un peu simplifiée, dans le § 23 de cette thèse, à savoir:

» Les séries

$$\sum f(n) \quad \text{et} \quad \sum f(\varphi(n)) \varphi'(n)$$

convergent et divergent en même temps,

1°. si $f(x)$ est une fonction qui, pour $x > x_0$, admet une dérivée continue de l'ordre p ($p \geq 1$) telle que l'intégrale

$$\int |f^{(p)}(x)| dx$$

est convergente; et si, pour $x \rightarrow \infty$,

$$f^{(i)}(x) \rightarrow 0, \quad i = 0, 1, \dots, p-1;$$

2°. nous supposons que la fonction $\varphi(x)$ admet une dérivée continue de l'ordre $p+1$; les dérivées de $\varphi(x)$ des ordres $1, 2, \dots, p+1$ seront, pour $x > x_0$, de signes constants; et, pour $x \rightarrow \infty$, nous aurons

$$\varphi(x) \rightarrow \infty; \quad |\varphi'(x)| < \text{const.}; \quad \varphi^{(i)}(x) \rightarrow 0, \quad i = 2, 3, \dots, p.$$

Nous avons donc supprimé la condition relativement à $f(x)$ qu'elle soit positive et décroissante; mais, en échange, nous avons imposé à la fonction $\varphi(x)$ des conditions restrictives, auxquelles l'exponentielle a^x ne satisfaisait pas.

La démonstration de M. NÖRLUND repose sur un théorème sur la relation entre la série et l'intégrale

$$\sum_0^\infty f(n) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty f(x) dx,$$

théorème qu'il a établi en se servant de la formule

$$\int_0^n f(x) dx - \sum_0^{n-1} f(v) = \sum_{i=1}^p \frac{B_i}{i!} [f^{(i-1)}(0) - f^{(i-1)}(n)] + (-1)^p \int_0^n \frac{\overline{B}_p(z)}{p!} f^{(p)}(z) dz.$$

Cette identité n'est pas autre chose, d'ailleurs, que la célèbre formule sommatoire découverte par EULER et MACLAURIN.

Le but de notre travail est de généraliser le théorème de condensation de CAUCHY et les théorèmes de M. NÖRLUND, en considérant des séries doubles et multiples au lieu de séries simples. Pour être complet, nous donnerons toutefois d'abord ces théorèmes et quelques autres théorèmes de transformation concernant les séries simples. Puis nous considérerons la fonction $f(x_1, x_2)$, dans laquelle nous ferons la substitution

$$x_a = \varphi_a(\xi_a), \quad a = 1, 2,$$

qui nous conduit à la série double transformée

$$\sum_{\infty, \infty} f(\varphi_1(\nu_1), \varphi_2(\nu_2)) \varphi_1'(\nu_1) \varphi_2'(\nu_2).$$

Dans le Chapitre I, nous donnerons, pour faciliter la lecture du chapitre suivant, un résumé de la théorie des nombres et des polynômes de BERNOULLI doubles et multiples, résumé que nous avons emprunté aux cours de M. NÖRLUND.

Le Chapitre II est consacré aux recherches sur la relation entre la convergence et la divergence d'une série et d'une intégrale. Dans la première partie, nous considérerons les séries et les intégrales simples, dans la seconde les séries et les intégrales doubles et multiples.

CAUCHY¹ a démontré le théorème bien connu suivant:

»Soit $f(x)$ une fonction positive, à partir d'une certaine valeur de x , décroissante, et tendant vers zéro lorsque x augmente indéfiniment. Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

est convergente ou divergente, suivant que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx$$

a un sens ou non.»

En réalité, ce théorème est déjà donné par MACLAURIN².

Dans le § 5, nous démontrerons qu'il ne faut pas nécessairement supposer la fonction $f(x)$ constamment décroissante, qu'elle peut, au contraire, sous certaines conditions, osciller une infinité de fois entre des limites finies.

M. BROMWICH³ a démontré qu'on peut encore multiplier une fonction positive et décroissante $f(x)$ par un facteur oscillatoire $\sin \varphi(x)$ ou $\cos \varphi(x)$, sans que le théorème de CAUCHY cesse d'être vrai, $\varphi(x)$ étant une fonction croissante admettant une dérivée décroissante $\varphi'(x)$ telle que l'intégrale $\int_{x_0}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx$ converge. En remplaçant les fonctions $\sin$ et $\cos$ par une autre fonction oscillatoire, et en remplaçant la fonction $\varphi(x)$ par une autre fonction dont la dérivée n'est pas nécessairement constamment décroissante, nous donnerons, dans le § 6, une forme plus générale du théorème de M. BROMWICH.

Dans les §§ 7—10 nous rendrons compte de quelques théorèmes importants de M. HARDY⁴ et de M. NÖRLUND, théorèmes d'une portée très grande, étant applicables non seulement à des fonctions positives mais à des fonctions d'un caractère beau-

¹ *Sur la convergence des séries* (Œuvres complètes, 2^e sér., t. 7, Paris, 1889, p. 267—279).

² *A treatise of fluxions*, Edinburgh, 1742, p. 289—290.

³ *The relation between the convergence of series and of integrals* (Proceedings of the London Mathematical Society, 2^e sér., t. 6, 1908, p. 327—338).

⁴ *Theorems connected with MacLaurin's test for the convergence of series* (Proceedings, etc., 2^e sér., t. 9, 1910, p. 126—144).

coup plus général. En vertu d'un théorème récent de M. LITTLEWOOD¹, nous donnerons au théorème principal la forme suivante:

»La série et l'intégrale

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} f(x) dx$$

convergent et divergent en même temps,

si la fonction $f(x)$, qui pour $x \rightarrow \infty$ tendra vers zéro, a une dérivée $p^{\text{ième}}$ continue et bornée; et si l'intégrale

$$\int \bar{B}_p(z) f^{(p)}(z) dz$$

est convergente, $\bar{B}_p(z)$ désignant une certaine fonction périodique.»

Dans la seconde partie du Chapitre II, nous passerons à des séries et des intégrales doubles et multiples. Nous donnerons d'abord le théorème de CAUCHY pour la série et l'intégrale

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} f(m,n) \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} f(x,y) dx dy,$$

et la généralisation correspondant à notre théorème du § 5.

Puis nous démontrerons quelques théorèmes sur la relation entre la convergence et la divergence d'une série double et de l'intégrale double correspondante, théorèmes tout à fait analogues à ceux de M. HARDY du § 7 et de MM. HARDY et NÖRLUND du § 10. C'est en établissant la formule sommatoire d'EULER-MACLAURIN pour les fonctions de deux variables que nous arriverons à la généralisation de ce dernier théorème.

Dans les derniers paragraphes du Chapitre II, nous considérerons une fonction particulière, à savoir

$$f(x + t_1 + t_2),$$

le théorème précédent admettant, dans ce cas, une forme assez simple:

»La série et l'intégrale doubles

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} f(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2$$

convergent et divergent en même temps, si la fonction $f(z)$, qui pour $z \rightarrow \infty$ tendra vers zéro, admet une dérivée continue de l'ordre m ($m \geq 2$), et si les intégrales

$$\int_1^{\infty} f(z) dz \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} |f^{(m)}(t_1 + t_2)| dt_1 dt_2$$

sont convergentes.»

En général, les théorèmes s'étendent immédiatement à des fonctions de plusieurs variables.

¹ *The converse of Abel's theorem on power series* (Proceedings, etc., 2^e sér., t. 9, 1910, p. 434—448).

HARDY and LITTLEWOOD, *Contributions to the arithmetic theory of series* (Proceedings, etc., 2^e sér., t. 11, 1912, p. 411—478).

Les théorèmes sur la relation entre la convergence des séries et des intégrales peuvent être considérés comme des critères intégrales de première espèce. Dans le chapitre suivant, nous aurons souvent l'occasion de les appliquer en cette qualité. On pourrait encore employer les relations du Chapitre II pour établir des égalités asymptotiques entre la série et l'intégrale en question. Cependant, dans ces recherches, ces dernières égalités n'ont pour nous qu'un intérêt secondaire.

Le Chapitre III est consacré aux recherches sur les théorèmes de condensation et sur les autres théorèmes de transformation pour les séries simples (Section I), ainsi que pour les séries doubles et multiples (Section II).

Dans le § 18, nous donnerons une démonstration tout à fait rigoureuse du théorème de CAUCHY, les démonstrations figurant dans la littérature n'étant pas parfaitement exactes. Remarquons d'ailleurs, déjà à cette place, que la condition de CAUCHY, au sujet des termes de la série, qu'ils doivent être décroissants, n'est pas une restriction essentielle. Car une série convergente à termes positifs est *absolument* convergente. Par conséquent, l'ordre des termes de la série n'a aucune influence sur la question de convergence ou divergence de la série. On peut donc appliquer, d'une manière ou d'une autre, le théorème de condensation à une série quelconque à termes positifs.

Dans les §§ 19—21, nous donnerons quelques théorèmes de transformation pour les séries à termes positifs, dont le plus général est conçu en ces termes:

» Soit $f(x)$ une fonction positive, tendant vers zéro pour $x \rightarrow \infty$, et telle que

$$\frac{f(x+\theta)}{f(x)} < c, \quad 0 < \theta < 1, \quad c \text{ const.} > 0;$$

soit $\varphi(x)$ une fonction positive et croissant vers l'infini pour $x \rightarrow \infty$, admettant une dérivée continue et positive, telle que

$$\frac{\varphi'(x+\theta)}{\varphi'(x)} < c, \quad 0 < \theta < 1, \quad c \text{ const.} > 0.$$

Alors, les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(\varphi(n)) \varphi'(n)$$

convergent et divergent en même temps.»

Remarquons encore qu'on peut de ces théorèmes tirer le théorème bien connu d'ABEL, retrouvé par M. PRINGSHEIM, qu'on a

$$nf(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

pour les séries à termes positifs et décroissants. Et nous verrons, en outre, que ce théorème est encore vrai, sous certaines conditions, pour des séries à termes positifs mais non nécessairement *constamment* décroissants.

En terminant cette section du Chapitre III, nous démontrerons, après l'avoir simplifié un peu en tenant compte du théorème cité de M. LITTLEWOOD, un des théorèmes de transformation de M. NÖRLUND:

» Soit $f(x)$ une fonction tendant vers zéro pour $x \rightarrow \infty$ et admettant une dérivée $p^{\text{ième}}$ continue et absolument intégrable; soit $\varphi(x)$ une fonction tendant vers l'infini

pour $x \rightarrow \infty$ et admettant une dérivée continue et bornée de l'ordre $p + 1$; soient les dérivées $\varphi^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, 3, \dots, p + 1$, de signes constants; et soit la dérivée $\varphi'(x)$ bornée.

Alors, les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(\varphi(n)) \varphi'(n)$$

sont, en même temps, convergentes et divergentes.»

Dans la seconde section du Chapitre III, nous avons réuni les théorèmes de condensation et de transformation se rapportant aux séries doubles et aux séries multiples. En général, ces théorèmes ne sont que des généralisations immédiates de ceux de la première section du chapitre. Cependant, le théorème de transformation le plus général étant assez compliqué, si nous considérons la série double $\Sigma f(\nu_1, \nu_2)$, nous nous dispenserons de le donner ici, nous contentant d'établir le théorème pour les séries doubles

$$\sum_{\omega_1, \omega_2}^{\infty, \infty} f(x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) \quad \text{et} \quad \sum_{\omega_1, \omega_2}^{\infty, \infty} f(x + \varphi_1(\nu_1) \omega_1 + \varphi_2(\nu_2) \omega_2) \varphi_1'(\nu_1) \varphi_2'(\nu_2).$$

Pour n'être pas obligé de donner, à plusieurs reprises, des conditions telles que »à partir d'une certaine valeur de x » et d'autres semblables, nous avons employé dans ces recherches les notations

$$\sum, \quad \sum^{\infty, \infty} \quad \text{et} \quad \int, \quad \int \int^{\infty, \infty}.$$

c'est à dire, nous n'avons pas indiqué les limites inférieures des séries et des intégrales.

On pourrait encore effectuer des recherches de ce genre en considérant des séries et des intégrales sommables. Cependant, dans cette thèse, nous nous sommes borné aux recherches esquissées ci-dessus.

Ajoutons encore que nous avons commencé des recherches sur la relation entre la convergence des séries et des intégrales et sur la transformation des séries, en considérant des critères intégrales de seconde espèce.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde reconnaissance envers mes chers et vénérés maîtres, MM. T. BRODÉN et N. E. NÖRLUND, professeurs de mathématiques à l'Université de Lund, qui, pendant le cours de mes études universitaires, n'ont cessé de me témoigner l'intérêt le plus bienveillant.

Comme on l'a vu, plusieurs des théorèmes de cette thèse remontent à M. NÖRLUND. Et c'est en assistant à ses cours et en travaillant sous sa sûre direction que j'ai reçu les impressions qui ont inspiré cette étude. Je le prie de vouloir bien accepter ici l'hommage de ma sincère gratitude.

CHAPITRE I.

Sur les nombres et les polynomes de BERNOULLI doubles et multiples.

§ 1. Dans ce chapitre, nous donnerons un résumé sommaire des éléments de la théorie des nombres et des polynomes de BERNOULLI doubles et multiples, pour faciliter la lecture du chapitre suivant.

Les nombres de BERNOULLI simples sont les nombres B_ν définis par le développement en série de MACLAURIN

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \frac{t^\nu}{\nu!}.$$

Comme on le sait, les nombres de BERNOULLI sont rationnels. Et nous savons de plus que tous les B_ν d'indice impair sont nuls, sauf B_1 qui est égal à $-\frac{1}{2}$. Quant aux B_ν d'indice pair, les premiers ont pour valeurs

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}.$$

Nous définirons les polynomes de BERNOULLI simples comme les polynomes $B_\nu(z)$ du développement

$$\frac{t e^{zt}}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(z) \frac{t^\nu}{\nu!}.$$

Par conséquent, les polynomes $B_\nu(z)$ sont liés aux nombres B_ν par l'équation

$$B_\nu(z) = z^\nu + \binom{\nu}{1} B_1 z^{\nu-1} + \dots + \binom{\nu}{i} B_i z^{\nu-i} + \dots + B_\nu,$$

d'où, en faisant homogène,

$$B_\nu(z | \omega) = z^\nu + \binom{\nu}{1} B_1 \omega z^{\nu-1} + \dots + \binom{\nu}{i} B_i \omega^i z^{\nu-i} + \dots + B_\nu \omega^\nu.$$

Dans la suite nous emploierons les notations

$$\frac{\omega t}{e^{\omega t} - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \omega^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} \quad \text{et} \quad \frac{\omega t e^{zt}}{e^{\omega t} - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(z | \omega) \frac{t^\nu}{\nu!}.$$

§ 2. Définissons maintenant les nombres et les polynomes de BERNOULLI doubles,

$$B_{\nu}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \quad \text{et} \quad B_{\nu}^{(2)}(z | \omega_1, \omega_2),$$

par les développements

$$(1) \quad \frac{\omega_1 \omega_2 t^2}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \frac{t^{\nu}}{\nu!},$$

et

$$(2) \quad \frac{\omega_1 \omega_2 t^2 e^{zt}}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}^{(2)}(z | \omega_1, \omega_2) \frac{t^{\nu}}{\nu!}.$$

Des définitions des nombres B_{ν} et des polynomes $B_{\nu}(z | \omega)$, on tire maintenant sans difficulté les relations

$$B_{\nu}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} B_i B_{\nu-i} \omega_1^i \omega_2^{\nu-i}$$

et

$$(3) \quad B_{\nu}^{(2)}(z_1 + z_2 | \omega_1, \omega_2) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} B_i(z_1 | \omega_1) B_{\nu-i}(z_2 | \omega_2);$$

en d'autres termes, les nombres et les polynomes de BERNOULLI doubles s'expriment par les nombres et les polynomes de BERNOULLI simples. Pour abréger, nous écrivons dans la suite $B_{\nu}^{(2)}$ au lieu de $B_{\nu}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$, et $B_{\nu}^{(2)}(z)$ pour $B_{\nu}^{(2)}(z | \omega_1, \omega_2)$.

Dans le chapitre suivant, nous aurons besoin des valeurs de $B_{\nu}^{(2)}(z)$ pour les arguments 0, ω_1 , ω_2 , $\omega_1 + \omega_2$. En vertu des développements (1) et (2), on voit aisément que les polynomes $B_{\nu}^{(2)}(z)$ satisfont aux deux équations fonctionnelles simultanées

$$(4) \quad \frac{B_{\nu}^{(2)}(z + \omega_1) - B_{\nu}^{(2)}(z)}{\omega_1} = \nu B_{\nu-1}(z | \omega_2),$$

$$(4') \quad \frac{B_{\nu}^{(2)}(z + \omega_2) - B_{\nu}^{(2)}(z)}{\omega_2} = \nu B_{\nu-1}(z | \omega_1),$$

équations qui, dans la théorie de ces polynomes, sont d'une importance fondamentale. A l'aide des définitions et des équations aux différences, nous pouvons immédiatement écrire les formules que nous avons en vue:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{\nu}^{(2)}(0) = B_{\nu}^{(2)} \\ B_{\nu}^{(2)}(\omega_1) = B_{\nu}^{(2)} + \omega_1 \omega_2^{\nu-1} \nu B_{\nu-1} \\ B_{\nu}^{(2)}(\omega_2) = B_{\nu}^{(2)} + \omega_1^{\nu-1} \omega_2 \nu B_{\nu-1} \\ B_{\nu}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = B_{\nu}^{(2)} + ((-1)^{\nu-1} \omega_1 \omega_2^{\nu-1} + \omega_1^{\nu-1} \omega_2) \nu B_{\nu-1} \end{array} \right.$$

dont on peut encore simplifier la dernière en se rappelant que tous les B_ν d'indice impair sont nuls, sauf B_1 :

$$(5') \quad \begin{cases} B_\nu^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = B_\nu^{(2)} + (\omega_1 \omega_2^{\nu-1} + \omega_1^{\nu-1} \omega_2) \nu B_{\nu-1}, & \nu \neq 2 \\ B_2^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = B_2^{(2)}. \end{cases}$$

D'ailleurs, on peut exprimer $B_\nu^{(2)}(\omega_1 + \omega_2)$ à l'aide de $B_\nu^{(2)}$ seul. Car des développements (2) et (1), il suit pour $z = \omega_1 + \omega_2$

$$\frac{\omega_1 \omega_2 t^2 e^{(\omega_1 + \omega_2)t}}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1)} = \frac{\omega_1 \omega_2 t^2}{(e^{-\omega_1 t} - 1)(e^{-\omega_2 t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{(2)} \frac{(-t)^\nu}{\nu!},$$

d'où

$$(6) \quad B_\nu^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = (-1)^\nu B_\nu^{(2)}.$$

En passant, nous nous rappelons qu'on a de même

$$B_\nu(\omega | \omega) = (-1)^\nu B_\nu \omega^\nu.$$

Ajoutons encore que l'équation (2), n fois différenciée par rapport à z , nous donne

$$D_z^n B_\nu^{(2)}(z) = \nu(\nu-1) \dots (\nu-n+1) B_{\nu-n}^{(2)}(z).$$

La première dérivée est donc

$$(7) \quad D_z B_\nu^{(2)}(z) = \nu B_{\nu-1}^{(2)}(z),$$

d'où, par intégration, les égalités

$$(8) \quad \int_0^{\omega_1} B_\nu^{(2)}(z_1 + z_2) dz_1 = \frac{1}{\nu+1} \left(B_{\nu+1}^{(2)}(\omega_1 + z_2) - B_{\nu+1}^{(2)}(z_2) \right) = \omega_1 B_\nu(z_2 | \omega_2)$$

et

$$\int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} B_\nu^{(2)}(z_1 + z_2) dz_1 dz_2 = \omega_1 \int_0^{\omega_2} B_\nu(z_2) dz_2 = 0.$$

§ 3. Les nombres et les polynomes de BERNOULLI multiples seront définis par les développements

$$\frac{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_p t^p}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \dots (e^{\omega_p t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{(p)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) \frac{t^\nu}{\nu!},$$

et

$$\frac{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_p t^p e^{zt}}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \dots (e^{\omega_p t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{(p)}(z | \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) \frac{t^\nu}{\nu!}.$$

Comme auparavant, nous emploierons les notations abrégées

$$B_{\nu}^{(p)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) = B_{\nu}^{(p)},$$

$$B_{\nu}^{(p)}(z \mid \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) = B_{\nu}^{(p)}(z).$$

A l'aide de ces deux développements et des développements suivants

$$\frac{\omega_i t}{e^{\omega_i t} - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} \omega_i \frac{t^{\nu}}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}^{(1)}(\omega_i) \frac{t^{\nu}}{\nu!}$$

$$\frac{\omega_i t e^{zt}}{e^{\omega_i t} - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}(z \mid \omega_i) \frac{t^{\nu}}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}^{(1)}(z \mid \omega_i) \frac{t^{\nu}}{\nu!}$$

les nombres et les polynômes se réduisent aux nombres et aux polynômes d'une multiplicité inférieure. En particulier, nous avons

$$B_{\nu}^{(p)} = \sum \frac{\nu!}{i_1! i_2! \dots i_p!} B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_p} \omega_1^{i_1} \omega_2^{i_2} \dots \omega_p^{i_p} \quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 + i_2 + \dots + i_p = \nu \\ i_r = 0, 1, 2, \dots, \nu \\ r = 1, 2, 3, \dots, p \end{array} \right.$$

$$B_{\nu}^{(p)}(z_1 + z_2 + \dots + z_p) = \sum \frac{\nu!}{i_1! i_2! \dots i_p!} B_{i_1}(z_1 \mid \omega_1) B_{i_2}(z_2 \mid \omega_2) \dots B_{i_p}(z_p \mid \omega_p) \quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 + i_2 + \dots + i_p = \nu \\ i_r = 0, 1, 2, \dots, \nu \\ r = 1, 2, 3, \dots, p \end{array} \right.$$

En appliquant parfaitement les raisonnements du paragraphe précédent, on trouve des résultats analogues que nous nous dispenserons de traiter en détails, les notant seulement:

Les polynômes satisfont à des équations aux différences des ordres 1, 2, 3, ..., p, à savoir

$$\Delta_{\omega_i} B_{\nu}^{(p)}(z) = \nu B_{\nu-1}^{(p-1)}(z \mid \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_p), \quad i = 1, 2, 3, \dots, p,$$

où Δ_{ω} désigne l'opération

$$\Delta_{\omega} f(z) = \frac{f(z + \omega) - f(z)}{\omega},$$

et, en général,

$$\Delta^i B_{\nu}^{(p)}(z) = \nu(\nu-1) \dots (\nu-i+1) B_{\nu-i}^{(p-i)}(z), \quad i = 1, 2, 3, \dots, p,$$

(toutes les $\frac{p!}{(p-i)! i!}$ combinaisons des paramètres $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ pris i à la fois).

Correspondant à (5) et à (5'), on trouve des identités du type

$$B_{\nu}^{(p)}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_i) = B_{\nu}^{(p)} + \nu \sum_{k=1}^i \omega_k B_{\nu-1}^{(p-1)} + \nu(\nu-1) \sum_{k,l} \omega_k \omega_l B_{\nu-2}^{(p-2)} + \dots +$$

$$+ \nu(\nu-1) \dots (\nu-i+1) \omega_1 \omega_2 \dots \omega_i B_{\nu-i}^{(p-i)};$$

en particulier, on a

$$B_{\nu}^{(p)}(0) = B_{\nu}^{(p)}.$$

Correspondant à (8), on a

$$B_{\nu}^{(p)}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p) = (-1)^{\nu} B_{\nu}^{(p)}.$$

Enfin

$$(7') \quad D_z^n B_{\nu}^{(p)}(z) = \nu(\nu - 1) \dots (\nu - n + 1) B_{\nu-n}^{(p)}(z),$$

d'où des systèmes des intégrales multiples du type

$$(8') \quad \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \dots \int_0^{\omega_i} B_{\nu}^{(p)}(z_1 + z_2 + \dots + z_p) dz_1 dz_2 \dots dz_i = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_i B_{\nu-i}^{(p)}(z_{i+1} + z_{i+2} + \dots + z_p).$$

Dans ce résumé de la théorie des nombres et des polynomes de BERNOULLI doubles et multiples, nous n'avons donné que les faits dont nous aurons besoin dans le chapitre suivant.

CHAPITRE II.

Sur la relation entre la convergence des séries et des intégrales.

I. Séries et intégrales simples.

§ 4. Dans ses *Exercices de Mathématiques*, CAUCHY¹ a démontré le théorème suivant sur la convergence des séries :

Soit $f(x)$ une fonction positive, à partir d'une certaine valeur de x , décroissante et tendant vers zéro, lorsque x augmente indéfiniment. Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

est convergente ou divergente, suivant que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx$$

a un sens ou non.

Ce théorème, employé souvent dans des recherches sur la convergence des séries, peut être généralisé dans plusieurs directions.

§ 5. D'abord, il ne faut pas nécessairement supposer que la fonction $f(x)$ soit décroissante *sans cesse*. Le théorème reste encore vrai si l'irrégularité de la décroissance et la croissance de $f(x)$ n'est pas trop grande, c'est à dire, si l'oscillation reste comprise entre des bornes finies. En effet, on a le théorème :

Théorème. — Soit $f(x)$ une fonction positive, à partir d'une certaine valeur de x , et tendant vers zéro

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

et supposons qu'elle décroisse de telle manière que

$$\frac{f(x + \theta)}{f(x)} < c, \quad 0 < \theta < 1,$$

¹ Sur la convergence des séries (*Œuvres complètes*, 2^e sér., t. 7, Paris, 1889, p. 267—279). Cf. surtout p. 272—273.

Sous une autre forme, le théorème est déjà démontré par MACLAURIN, *A treatise of fluxions*, Edinburgh, 1742, p. 289—290.

c étant une constante positive finie. Dans ces conditions, la série et l'intégrale

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} f(x) dx$$

convergent et divergent en même temps.

On a, en effet, les inégalités

$$f(p + \theta_1) < \int_p^{p+1} f(x) dx < f(p + \theta_2), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

$f(p + \theta_1)$ et $f(p + \theta_2)$ étant la plus petite et la plus grande valeur de $f(x)$ dans l'intervalle $p \leq x \leq p + 1$.

Or, suivant l'hypothèse, on a les inégalités

$$\frac{1}{c} f(p + 1) < f(p + \theta) < c f(p), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

d'où

$$\frac{1}{c} f(p + 1) < \int_p^{p+1} f(x) dx < c f(p).$$

Faisons maintenant varier l'entier p de n à $m - 1$, on trouve

$$\frac{1}{c} \sum_{n+1}^m f(p) < \int_n^m f(x) dx < c \sum_n^{m-1} f(p).$$

Donc, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

et l'intégrale

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

sont convergentes et divergentes en même temps.

Parmi les fonctions susceptibles de l'application de ce théorème, il y a donc, entre autres, celles où les termes des séries qui en dérivent sont d'une oscillation ininterrompue.

Par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{1 + \cos^2 \frac{\pi x}{2}}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

nous donne, pour $\alpha = 1, 2, \dots$, les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{2}{6^2} + \dots$$

etc.,

dont les termes sont, pour des valeurs de n suffisamment grandes, alternativement plus petits et plus grands que le terme précédent.

Plus généralement, soit $f(x)$ une fonction positive et décroissante; des fonctions telles que

$$f(x) (a + b \cos x), \quad a > b; \quad f(x) c^{a+b \cos x}, \quad c > 0; \quad f(x) a^{x-E(x)}, \quad a > 0,$$

$E(x)$ étant le plus grand entier inférieur à x , satisfont aux conditions du théorème.

Remarque. — Il ne sera pas inutile de remarquer que le théorème de CAUCHY et le théorème de ce paragraphe n'exigent pas nécessairement que la fonction $f(x)$ tende vers zéro pour x croissant vers l'infini. Il suffit que la fonction tende vers une limite déterminée et que la fonction soit plus grande que cette limite.

En effet, $f(x)$ tendant vers la limite s

$$f(x) \rightarrow s, \quad x \rightarrow \infty,$$

nous n'avons qu'à considérer la fonction $f(x) - s$ au lieu de $f(x)$ pour voir que les théorèmes restent encore vrais.

§ 6. Considérons maintenant une généralisation intéressante du théorème de CAUCHY, donnée, il y a dix ans, par M. BROMWICH¹. Il a montré qu'il est encore permis, sous certaines conditions, de multiplier une fonction positive et décroissante $f(x)$ par un facteur oscillatoire $\sin \varphi(x)$ ou $\cos \varphi(x)$, sans que le théorème cesse d'être vrai. Voici son théorème:

Soit $f(x)$ une fonction positive et décroissante

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

soit $\varphi(x)$ une fonction positive et croissante

$$\varphi(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

admettant une dérivée décroissante $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

et supposons que l'intégrale

$$\int_0^\infty f(x) \varphi'(x) dx$$

soit convergente.

Dans ces conditions, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{\sin}{\cos} \varphi(n)$$

et l'intégrale

$$\int_0^\infty f(x) \frac{\sin}{\cos} \varphi(x) dx$$

convergent et divergent en même temps.

¹ The relation between the convergence of series and of integrals (Proceedings, etc., 2^e sér., t. 6, 1908, p. 327—338).

Dans ce théorème de M. BROMWICH, il ne faut pas nécessairement supposer $\varphi'(x)$ décroissante *sans cesse*. Et l'on pourrait en outre remplacer le facteur oscillatoire $\frac{\sin}{\cos} x$ par une fonction quelconque dont l'oscillation reste comprise entre des limites finies et dont la dérivée aussi est bornée. En réalité, le théorème est susceptible de la généralisation suivante:

Théorème. — Soit $f(x)$ une fonction positive et décroissante

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

soit $\psi(x)$ une fonction dont l'oscillation reste comprise entre des limites finies et dont la dérivée aussi est bornée

$$|\psi(x)| < C, \quad |\psi'(x)| < C;$$

soit $\varphi(x)$ une fonction positive et croissante

$$\varphi(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

admettant une dérivée $\varphi'(x)$ tendant vers zéro

$$\varphi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

et supposons

$$\frac{\varphi'(x + \theta)}{\varphi'(x)} < c, \quad \theta > 0,$$

c étant une constante positive et finie;

soit, enfin, l'intégrale

$$\int f(x) \varphi'(x) dx$$

convergente.

Dans ces conditions, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \psi(\varphi(n))$$

et l'intégrale

$$\int f(x) \psi(\varphi(x)) dx$$

sont convergentes et divergentes en même temps.

La démonstration se rapproche de celle du théorème de M. BROMWICH. Il ne faut que des modifications légères.

Posons

$$f(x) \psi(\varphi(x)) = F(x)$$

et considérons la différence

$$\int_n^{n+1} F(x) dx - F(n).$$

On trouve

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} F(x) dx - F(n) &= \int_0^1 [F(n+x) - F(n)] dx \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x F'(n+y) dy.\end{aligned}$$

Or,

$$|F'(n+y)| \leq C |f'(n+y)| + C |f(n+y)| \cdot |\varphi'(n+y)|,$$

les fonctions $\phi(x)$ et $\psi(x)$ étant inférieures à C .

Des conditions concernant $f(x)$ et $\varphi(x)$ il résulte

$$f'(x) < 0, \quad \varphi'(x) > 0.$$

On en tire

$$|F'(n+y)| \leq -C f'(n+y) + C f(n+y) \cdot \varphi'(n+y)$$

d'où, en vertu de la décroissance de $f(x)$ et de l'hypothèse relativement à $\varphi'(x)$,

$$|F'(n+y)| \leq -C f'(n+y) + Cc f(n) \varphi'(n).$$

Cela posé, on a

$$\int_0^x |F'(n+y)| dy \leq C(f(n) - f(n+x)) + Cc f(n) \varphi'(n) \cdot x$$

c'est à dire

$$\leq C(f(n) - f(n+1)) + Cc f(n) \varphi'(n),$$

x variant dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$.

Donc, la différence satisfait à l'inégalité

$$\left| \int_n^{n+1} F(x) dx - F(n) \right| \leq C(f(n) - f(n+1)) + Cc f(n) \varphi'(n)$$

En soumettant cette inégalité à une sommation, on voit que le second membre a une limite. Car la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f(n) - f(n+1)]$$

est évidemment convergente; et, en vertu du théorème du § 5, il en est de même de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \varphi'(n),$$

l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx$$

étant supposée convergente.

Donc, la série et l'intégrale

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \phi(\varphi(n)) \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} f(x) \phi(\varphi(x)) dx$$

convergent et divergent en même temps, c. q. f. d.

Plus loin, dans un autre ordre d'idées, nous considérerons des fonctions satisfaisant aux conditions que doit remplir $\phi(x)$, à savoir les fonctions périodiques ¹

$$\overline{B}_\nu(x) = B_\nu(x - E(x))$$

qui, en vertu de la relation (7'), admettent les dérivées

$$\nu \overline{B}_{\nu-1}(x) = \nu B_{\nu-1}(x - E(x)).$$

§ 7. Le théorème intéressant de M. BROWICH n'est qu'un cas particulier d'un théorème de M. HARDY ², qui a donné récemment le théorème important et élégant que nous écrirons sous la forme suivante ³.

Soit $f(x)$ une fonction tendant vers zéro

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

supposons qu'elle admette une dérivée continue $f'(x)$, et admettons que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} |f'(x)| dx$$

soit convergente. Dans ces conditions, la série et l'intégrale

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} f(x) dx$$

sont, en même temps, convergentes et divergentes.

La démonstration se ramène essentiellement à l'identité élémentaire

$$\int_n^{n+1} (n+1-x) f'(x) dx = -f(n) + \int_n^{n+1} f(x) dx,$$

d'où on obtient l'inégalité

$$\left| \sum_{n=1}^n f(n) - \int_1^{n+1} f(x) dx \right| \leq \int_1^{n+1} |f'(x)| dx.$$

Dans ce qui suit, nous aurons souvent l'occasion de faire usage de ces deux relations.

¹ $E(x)$ désignant, comme à l'ordinaire, le plus grand entier inférieur à x .

² *Theorems connected with MACLAURIN'S test for the convergence of series* (Proceedings, etc., 2^e sér., t. 9, 1910, p. 126—144).

³ l. c., p. 127.

§ 8. Dans cet ordre d'idées, M. HARDY ¹ a généralisé immédiatement son théorème en démontrant un énoncé auquel nous donnerons la forme:

Si l'une des deux intégrales

$$\int_0^{\infty} |f^{(2k+1)}(x)| dx, \quad \int_0^{\infty} |f^{(2k+2)}(x)| dx$$

est convergente,

et si la fonction $f(x)$ et ses $2k$ premières dérivées tendent vers zéro

$$f^{(i)}(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2k,$$

la série et l'intégrale

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} f(x) dx$$

convergent et divergent en même temps.

Ce théorème a été redécouvert par M. NÖRLUND sous une forme différente et plus simple.

§ 9. Mais avant de donner la forme définitive du théorème, nous nous arrêterons à un théorème d'une très grande importance qu'a donné récemment M. LITTLEWOOD ² et qu'il a plus tard ³ généralisé un peu:

Soit $f(x)$ une fonction admettant des dérivées d'ordres quelconques. Si $f(x)$ a une limite

$$f(x) \rightarrow s, \quad x \rightarrow \infty,$$

alors, si une certaine dérivée $f^{(p)}(x)$ est bornée

$$|f^{(p)}(x)| < C,$$

toutes les dérivées précédentes tendent vers zéro

$$f^{(i)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p-1.$$

A l'aide de ce théorème, nous simplifierons un peu les conditions des théorèmes de MM. HARDY et NÖRLUND.

§ 10. Voici le théorème:

Théorème. — La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

¹ l. c., p. 129.

² *The converse of Abel's theorem on power series* (Proceedings, etc., 2^e sér., t. 9, 1910, p. 434--448). Voir p. 437--438.

³ HARDY and LITTLEWOOD, *Contributions to the arithmetic theory of series* (Proceedings, etc., 2^e sér., t. 11, 1912, p. 411--478). Voir p. 423.

et l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

sont ou convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux,

si la fonction $f(x)$ a une dérivée $p^{\text{ième}}$ continue ($p \geq 1$);

si $f(x)$ tend vers zéro pour x tendant vers l'infini

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

et s'il en est de même pour la dérivée de l'ordre $p - 1$,

$$f^{(p-1)}(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

et si, enfin, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \overline{B}_p(z) f^{(p)}(z) dz$$

est convergente, $\overline{B}_p(z)$ désignant la fonction périodique de z à la période 1 qui, pour $0 \leq z < 1$, se confond avec le polynôme de BERNOULLI $B_p(z)$.

Considérons la relation

$$(9) \quad \int_0^n f(x) dx - \sum_{v=0}^{n-1} f(v) = \frac{B_1}{1!} [f(0) - f(n)] + \frac{B_2}{2!} [f'(0) - f'(n)] + \dots + \\ + \frac{B_p}{p!} [f^{(p-1)}(0) - f^{(p-1)}(n)] + (-1)^p \int_0^n \frac{\overline{B}_p(z)}{p!} f^{(p)}(z) dz,$$

identité, qu'on vérifie aisément en partant de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{B_p(z)}{p!} f^{(p)}(x+z) dz,$$

qu'on intègre par parties p fois, et en tenant compte des propriétés des polynômes de BERNOULLI, esquissées dans le chapitre précédent. En remplaçant, dans le résultat, successivement $f(x)$ par $f(x+1)$, ..., $f(x+n)$ et en ajoutant ces n égalités, on trouve la formule (9). L'identité (9) n'est d'ailleurs autre chose que la célèbre formule sommatoire découverte par EULER et MACLAURIN ¹.

Faisons maintenant tendre n vers l'infini, le second membre de (9) aura une limite. Car, par hypothèse, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\overline{B}_p(z)}{p!} f^{(p)}(z) dz$$

¹ Cette méthode simple d'établir la formule d'EULER—MACLAURIN nous semble introduite dans l'analyse par IMCHENETSKY, *Sur les fonctions de Jacques Bernoulli, et sur l'expression de la différence entre une somme et une intégrale de même limites* (Giornale di matematiche, t. 9, 1871, p. 87—103).

est convergente. Et nous avons en outre supposé

$$f(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

et

$$f^{(p-1)}(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

d'où, en vertu du théorème de M. LITTLEWOOD, il viendra encore

$$f^{(i)}(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, p-2.$$

Par conséquent, le premier membre de (9) a aussi une limite, et le théorème est établi.

Si l'intégrale

$$\int_0^\infty f^{(p)}(z) dz$$

est absolument convergente, la dernière condition du théorème est toujours remplie. Et de la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty f^{(p)}(z) dz$ il suit que la dérivée $f^{(p-1)}(z)$ a une limite pour $z \rightarrow \infty$. Le théorème obtiendra donc la forme très simple et élégante:

Théorème. — *La série et l'intégrale*

$$\sum_0^\infty f(n) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty f(x) dx$$

convergent et divergent en même temps, si la fonction $f(x)$ admet une dérivée $p^{\text{ième}}$ continue $f^{(p)}(x)$ ($p \geq 1$);

si l'intégrale

$$\int_0^\infty |f^{(p)}(z)| dz$$

est convergente;

et si, enfin,

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Exemple. — Voir § 23.

Le théorème de M. HARDY du § 7 est un cas particulier de ce théorème, à savoir $p = 1$.

Le théorème original de MACLAURIN et de CAUCHY est également renfermé dans ce cas particulier.

En terminant ce paragraphe, donnons une fonction qui n'est pas absolument intégrable mais qui, multipliée par un polynôme de BERNOULLI, nous donnera une intégrale convergente.

Considérons la fonction

$$\frac{\sin \pi x}{x}.$$

Cette fonction n'est pas absolument intégrable; car

$$\int_n^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx > \frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} |\sin \pi x| dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 |\sin \pi x| dx = \frac{c}{n+1}.$$

On a donc

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx > c \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right),$$

et l'intégrale est divergente.

Considérons l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \overline{B}_p(x) \frac{\sin \pi x}{x} dx, \quad p \text{ impair.}$$

On aura

$$\int_n^{n+1} \overline{B}_p(x) \frac{\sin \pi x}{x} dx = (-1)^n \int_0^1 B_p(x) \frac{\sin \pi x}{x+n} dx;$$

car, en vertu de la définition ¹, on a, dans l'intervalle en question,

$$\overline{B}_p(x) = B_p(x-n), \quad n \leq x \leq n+1.$$

Par conséquent, on obtient

$$\int_1^{\infty} \overline{B}_p(x) \frac{\sin \pi x}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 B_p(x) \frac{\sin \pi x}{x+n} dx.$$

Or, les intégrales

$$\int_0^1 B_p(x) \frac{\sin \pi x}{x+n} dx$$

sont décroissantes pour n croissant. En vertu du critère de LEIBNIZ l'intégrale est donc convergente.

II. Séries et intégrales doubles et multiples.

§ 11. Poursuivons maintenant notre comparaison des séries et des intégrales en considérant des fonctions de deux ou de plusieurs variables.

La généralisation immédiate du théorème fondamental de CAUCHY est bien connue. Elle est conçue en ces termes ²:

¹ Voir p. 21.

² Voir, par exemple, PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, 2^e éd., Paris, 1901, p. 289—290; ou GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I, 2^e éd., Paris, 1910, p. 424.

Soit $f(x, y)$ une fonction positive, décroissante quand la valeur de x ou celle de y croît, et tendant vers zéro, si l'on fait croître x ou y à l'infini

$$f(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad y \rightarrow \infty.$$

Alors la série double

$$\sum_{m, n}^{\infty, \infty} f(m, n)$$

et l'intégrale double

$$\int \int_{\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy$$

sont ou convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux.

D'ailleurs, le théorème s'étend immédiatement, sous des hypothèses convenables, à des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Mais aussi dans ce cas nous pouvons donner des théorèmes d'une étendue beaucoup plus grande. En profitant des idées émises dans les paragraphes 5—10, nous donnerons une suite de théorèmes de plus en plus étendus sur la relation entre la convergence et la divergence des séries et des intégrales.

§ 12. D'abord nous démontrerons cette généralisation du théorème du § 5:

Théorème. — Soit $f(x, y)$ une fonction positive, à partir de certaines valeurs de x et de y , et tendant vers zéro si l'on fait croître x ou y vers l'infini

$$f(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad y \rightarrow \infty;$$

supposons en outre que $f(x, y)$ décroisse de telle manière que

$$\frac{f(x + \theta_1, y + \theta_2)}{f(x, y)} < c, \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

c étant une constante finie positive. Dans ces conditions, la série et l'intégrale doubles

$$\sum_{m, n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \int \int_{\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy$$

sont convergentes et divergentes en même temps.

Evidemment, on a

$$f(p + \theta_1, q + \theta_2) < \int_p^{p+1} \int_q^{q+1} f(x, y) \, dx \, dy < f(p + \theta_3, q + \theta_4), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$f(p + \theta_1, q + \theta_2)$ et $f(p + \theta_3, q + \theta_4)$ étant la plus petite et la plus grande valeur de l'intégrande dans l'intervalle $p \leq x \leq p + 1, q \leq y \leq q + 1$. Or, en vertu des hypothèses, on a les inégalités

$$\frac{1}{c^2} f(p + 1, q + 1) < f(p + \theta_i, q + \theta_j) < c^2 f(p, q),$$

d'où suivent

$$\frac{1}{c^2} f(p+1, q+1) < \int_p^{p+1} \int_q^{q+1} f(x, y) dx dy < c^2 f(p, q).$$

En soumettant ces inégalités à une sommation double¹, il viendra

$$\frac{1}{c^2} \sum_{m_1+1, n_1+1}^{m_2, n_2} f(p, q) < \int_{m_1}^{m_2} \int_{n_1}^{n_2} f(x, y) dx dy < c^2 \sum_{m_1, n_1}^{m_2-1, n_2-1} f(p, q).$$

Faisons maintenant tendre m_2 et n_2 vers l'infini, il s'ensuivra que la série double et l'intégrale double

$$\sum_{m, n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \int \int_{\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$$

convergent et divergent en même temps.

Le mode de démonstration est évidemment général, et l'on peut énoncer le théorème analogue pour des séries et des intégrales multiples.

§ 13. Au théorème du § 7 de M. HARDY correspond un théorème analogue pour les séries et les intégrales doubles et multiples.

En effet, considérons l'intégrale double

$$\int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (m+1-x)(n+1-y) \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (m+1-x)(n+1-y) \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy &= \int_m^{m+1} (m+1-x) \int_n^{n+1} (n+1-y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \\ &\quad + \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (m+1-x) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx dy. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_m^{m+1} (m+1-x) \int_n^{n+1} (n+1-y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy &= \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (m+1-x)(n+1-y) f(x, y) \\ &\quad + \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (n+1-y) f(x, y) dx; \end{aligned}$$

¹ Tout malentendu étant exclu, nous écrirons désormais, pour plus de commodité,

$$\sum_{m=\mu_1, n=\nu_1}^{\mu_2, \nu_2}, \text{ ou mieux } \sum_{\mu_1, \nu_1}^{\mu_2, \nu_2}, \text{ au lieu de } \sum_{m=\mu_1, n=\nu_1}^{m=\mu_2, n=\nu_2}.$$

et

$$\int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (n+1-y) f(x, y) dx dy = \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (n+1-y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy - \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} f(x, y) dx dy.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (m+1-x)(n+1-y) \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy &= \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (m+1-x) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx dy \\ &+ \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} (n+1-y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy - \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} f(x, y) dx dy + f(m, n). \end{aligned}$$

Prenons les valeurs absolues, en observant que x et y varient dans les intervalles $m \leq x \leq m+1$, $n \leq y \leq n+1$. Nous trouverons

$$\left| f(m, n) - \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} f(x, y) dx dy \right| \leq \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} \left| \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right| dx dy + \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| dx dy + \int_m^{m+1} \int_n^{n+1} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| dx dy$$

En soumettant ces fonctions à une sommation double, il viendra

$$\left| \sum_{1,1}^{m,n} f(p, q) - \int_1^{m+1} \int_1^{n+1} f(x, y) dx dy \right| \leq \int_1^{m+1} \int_1^{n+1} \left| \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right| dx dy + \int_1^{m+1} \int_1^{n+1} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| dx dy + \int_1^{m+1} \int_1^{n+1} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| dx dy$$

En vertu de cette inégalité, le théorème que nous avons en vue peut s'énoncer ainsi:

Théorème. — Soit $f(x, y)$ une fonction tendant vers zéro pour x ainsi que pour y augmentant indéfiniment

$$f(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad y \rightarrow \infty,$$

et admettant des dérivées continues

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Si les trois intégrales

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\partial f}{\partial x} dx dy, \quad \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy$$

sont absolument convergentes, la série et l'intégrale doubles

$$\sum_{1,1}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \int_1^\infty f(x, y) dx dy$$

convergent et divergent en même temps.

Exemple. — La fonction

$$f(x, y) = \frac{e^{i(x^a + y^a)}}{x^b + y^b}, \quad 0 < a \leq 1, \quad b > 0,$$

satisfait aux conditions du théorème, si l'on a $b > 1 + a$. Donc, la série double

$$\sum \frac{e^{i(m^a + n^a)}}{m^b + n^b}, \quad 0 < a \leq 1,$$

converge pour $b > 2(1 - a)$, si $0 < a \leq \frac{1}{3}$, et pour $b > 1 + a$, si $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$.

En appliquant des raisonnements parfaitement analogues, le théorème s'étend à des fonctions de plusieurs variables. Pourvu que la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tende vers zéro, tant qu'une des variables $x_1, x_2, \dots, x_p$, n'importe laquelle, grandit indéfiniment

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow 0, \text{ pour } x_1 \rightarrow \infty \text{ ou } x_2 \rightarrow \infty \dots \text{ ou } x_p \rightarrow \infty,$$

et pourvu qu'elle admette des dérivées continues et absolument intégrables (intégrations p^{uples})

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, \quad i \neq j;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, p, \quad i \neq j \neq k; \dots; \quad \frac{\partial^p f}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_p},$$

la série et l'intégrale p^{uples}

$$\sum f(n_1, n_2, \dots, n_p) \quad \text{et} \quad \int \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_p) dx_1 dx_2 \dots dx_p$$

convergent et divergent en même temps.

Comme nous l'avons déjà remarqué, dans le cas d'une seule variable, le théorème de M. BROMWICH et ses généralisations (voir § 6) ne sont que des cas particuliers du théorème précédent. Nous nous dispenserons donc de les déduire ici, d'autant plus qu'il sont un peu compliqués.

§ 14. La généralisation des théorèmes des paragraphes 8 et 10 exige des considérations un peu plus approfondies. Le théorème s'énoncera en ces termes:

Théorème. — *La série double*

$$\sum_{\nu_1, \nu_2}^{\infty, \infty} f(\nu_1, \nu_2)$$

et l'intégrale double

$$\int \int f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

sont ou convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux,

si la fonction $f(t_1, t_2)$ admet une dérivée continue

$$\frac{\partial^{m_1+m_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2}}, \quad m_1, m_2 \geq 1;$$

si $f(t_1, t_2)$ tend vers zéro pour t_1 ainsi que pour t_2 tendant vers l'infini

$$f(t_1, t_2) \rightarrow 0, \quad t_1 \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad t_2 \rightarrow \infty;$$

si les intégrales

$$\int_0^\infty f(t_1, t_2) dt_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

sont convergentes;

et si, enfin, l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^{m_1+m_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2$$

est absolument convergente.

Nous partirons de l'égalité

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega f(x) &= \int_0^\omega \left(f(x+z) + \frac{\omega B_1}{1!} f'(x+z) + \frac{\omega^2 B_2}{2!} f''(x+z) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^m B_m}{m!} f^{(m)}(x+z) \right) dz + (-1)^{m+1} \int_0^\omega \frac{B_m(z)}{m!} f^{(m)}(x+z) dz; \quad m > 0. \end{aligned} \right.$$

C'est là une identité qu'on vérifie sans difficulté en partant de l'intégrale

$$\int_0^\omega \frac{B_m(z)}{m!} f^{(m)}(x+z) dz$$

et en procédant, comme nous l'avons déjà recommandé, en déduisant la formule (9).

Appliquons cette identité deux fois de suite à la fonction $\omega_1 \omega_2 f(x_1, x_2)$. D'abord, nous obtenons

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 f(x_1, x_2) &= \omega_2 \int_0^{\omega_1} \left(f(x_1 + t_1, x_2) + \frac{\omega_1 B_1}{1!} \frac{\partial f(x_1 + t_1, x_2)}{\partial t_1} + \frac{\omega_1^2 B_2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_1 + t_1, x_2)}{\partial t_1^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_1^{m_1} B_{m_1}}{m_1!} \frac{\partial^{m_1} f(x_1 + t_1, x_2)}{\partial t_1^{m_1}} \right) dt_1 + (-1)^{m_1+1} \omega_2 \int_0^{\omega_1} \frac{B_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{\partial^{m_1} f(x_1 + t_1, x_2)}{\partial t_1^{m_1}} dt_1, \end{aligned}$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(11) \quad \omega_1 \omega_2 f(x_1, x_2) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \int_0^{\omega_1} \omega_2 \frac{\omega_1^{i_1} B_{i_1}}{i_1!} \frac{\partial^{i_1} f(x_1 + t_1, x_2)}{\partial t_1^{i_1}} dt_1 + (-1)^{m_1+1} \int_0^{\omega_1} \omega_2 \frac{B_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{\partial^{m_1} f(x_1 + t_1, x_2)}{\partial t_1^{m_1}} dt_1$$

Or, l'égalité (10) employée sur la fonction

$$\frac{\partial^{i_1} f(x_1 + t_1, x_2)}{\partial t_1^{i_1}}$$

nous donne également

$$\begin{aligned} \omega_2 \frac{\partial^{i_1} f(x_1 + t_1, x_2)}{\partial t_1^{i_1}} &= \sum_{i_2=0}^{m_2} \int_0^{\omega_2} \frac{\omega_2^{i_2} B_{i_2}}{i_2!} \frac{\partial^{i_1+i_2} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{i_2}} dt_2 \\ &\quad + (-1)^{m_2+1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m_2}(t_2)}{m_2!} \frac{\partial^{i_1+m_2} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{m_2}} dt_2. \end{aligned}$$

Substituons cette expression dans les intégrales de l'équation précédente, et l'identité devient

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \omega_1 \omega_2 f(x_1, x_2) &= \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{\omega_1^{i_1} B_{i_1}}{i_1!} \frac{\omega_2^{i_2} B_{i_2}}{i_2!} \frac{\partial^{i_1+i_2} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{i_2}} dt_1 dt_2 \\ &\quad + (-1)^{m_2+1} \sum_{i_1=0}^{m_1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{\omega_1^{i_1} B_{i_1}}{i_1!} \frac{B_{m_2}(t_2)}{m_2!} \frac{\partial^{i_1+m_2} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2 \\ &\quad + (-1)^{m_1+1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{\omega_2^{i_2} B_{i_2}}{i_2!} \frac{\partial^{m_1+i_2} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{i_2}} dt_1 dt_2 \\ &\quad + (-1)^{m_1+m_2} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{B_{m_2}(t_2)}{m_2!} \frac{\partial^{m_1+m_2} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2. \end{aligned} \right.$$

Cette égalité peut encore être simplifiée en employant l'identité (11) sur les deux fonctions

$$\frac{\partial^{m_1} f(x_1 + t_1, x_2)}{\partial t_1^{m_1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{m_2} f(x_1, x_2 + t_2)}{\partial t_2^{m_2}}.$$

On trouve

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \omega_1 \omega_2 f(x_1, x_2) &= \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{\omega_1^{i_1} B_{i_1}}{i_1!} \frac{\omega_2^{i_2} B_{i_2}}{i_2!} \frac{\partial^{i_1+i_2} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{i_2}} dt_1 dt_2 \\ &\quad + (-1)^{m_1+1} \omega_2 \int_0^{\omega_1} \frac{B_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{\partial^{m_1} f(x_1 + t_1, x_2)}{\partial t_1^{m_1}} dt_1 + (-1)^{m_2+1} \omega_1 \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m_2}(t_2)}{m_2!} \frac{\partial^{m_2} f(x_1, x_2 + t_2)}{\partial t_2^{m_2}} dt_2 \\ &\quad + (-1)^{m_1+m_2+1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{B_{m_2}(t_2)}{m_2!} \frac{\partial^{m_1+m_2} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, considérons la série double

$$\sum f(v_1, v_2),$$

où la sommation doit être étendue à toutes les valeurs non-négatives de v_1 et v_2 .

Formons d'abord, dans la formule (12), la somme pour $v_\alpha = 0, 1, 2, \dots, n_\alpha - 1$, $\alpha = 1, 2$; c'est à dire, remplaçons dans la formule (12) x_α successivement par

$$x_\alpha + v_\alpha \omega_\alpha, \quad v_\alpha = 0, 1, 2, \dots, n_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2,$$

et ajoutons ces $n_1 n_2$ égalités. Puis, posons $x_1 = x_2 = 0$ et $\omega_1 = \omega_2 = 1$, il viendra

$$\begin{aligned} \sum_{v_1=0, v_2=0}^{n_1-1, n_2-1} f(v_1, v_2) &= \sum_{i_1=0, i_2=0}^{m_1, m_2} \sum_{v_1=0, v_2=0}^{n_1-1, n_2-1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{B_{i_1}}{i_1!} \frac{B_{i_2}}{i_2!} \frac{\partial^{i_1+i_2} f(v_1+t_1, v_2+t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{i_2}} dt_1 dt_2 \\ &+ (-1)^{m_1+1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \sum_{v_1=0, v_2=0}^{n_1-1, n_2-1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{B_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{B_{i_2}}{i_2!} \frac{\partial^{m_1+i_2} f(v_1+t_1, v_2+t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{i_2}} dt_1 dt_2 \\ &+ (-1)^{m_2+1} \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{v_1=0, v_2=0}^{n_1-1, n_2-1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{B_{i_1}}{i_1!} \frac{B_{m_2}(t_2)}{m_2!} \frac{\partial^{i_1+m_2} f(v_1+t_1, v_2+t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2 \\ &+ (-1)^{m_1+m_2} \sum_{v_1=0, v_2=0}^{n_1-1, n_2-1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{B_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{B_{m_2}(t_2)}{m_2!} \frac{\partial^{m_1+m_2} f(v_1+t_1, v_2+t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\bar{B}_m(z)$, comme dans le § 10, une fonction périodique de z admettant le nombre 1 pour période et qui, dans l'intervalle $0 \leq z < 1$, coïncide avec le polynome de BERNOULLI $B_m(z)$.

Cela posé, l'égalité précédente nous donne ¹

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \sum_{v_1=0, v_2=0}^{n_1-1, n_2-1} f(v_1, v_2) &= \sum_{i_1=0, i_2=0}^{m_1, m_2} \frac{B_{i_1}}{i_1!} \frac{B_{i_2}}{i_2!} \int_0^{n_1} \int_0^{n_2} \frac{\partial^{i_1+i_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{i_2}} dt_1 dt_2 \\ &+ (-1)^{m_1+1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \frac{B_{i_2}}{i_2!} \int_0^{n_1} \int_0^{n_2} \frac{\bar{B}_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{\partial^{m_1+i_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{i_2}} dt_1 dt_2 \\ &+ (-1)^{m_2+1} \sum_{i_1=0}^{m_1} \frac{B_{i_1}}{i_1!} \int_0^{n_1} \int_0^{n_2} \frac{\bar{B}_{m_2}(t_2)}{m_2!} \frac{\partial^{i_1+m_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2 \\ &+ (-1)^{m_1+m_2} \int_0^{n_1} \int_0^{n_2} \frac{\bar{B}_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{\bar{B}_{m_2}(t_2)}{m_2!} \frac{\partial^{m_1+m_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2. \end{aligned} \right.$$

¹ Pour les formules (10)–(14) cf. aussi les formules (15), (16) et (18) de M. LANDAU, *Neuer*

Faisons maintenant tendre n_1 et n_2 vers l'infini. Le premier terme de la somme double du second membre de (14) devient, en effet,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Les termes de la somme double correspondant à $i_\alpha = 0$, $i_\beta \neq 0$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $\alpha \neq \beta$, sont convergentes; car

$$\iint \frac{\partial^{i_\beta} f(t_1, t_2)}{\partial t_\beta^{i_\beta}} dt_1 dt_2 \rightarrow \int \frac{\partial^{i_\beta-1} f(t_1, t_2)}{\partial t_\beta^{i_\beta-1}} dt_\alpha, \quad i_\beta = 1, 2, \dots, m_\beta,$$

qui se réduisent à l'hypothèse que l'intégrale

$$\int f(t_1, t_2) dt_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

soit convergente.

Les autres intégrales de la somme double existent toutes; car, suivant le théorème de M. LITTLEWOOD, on a

$$\frac{\partial^{i_1+i_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{i_2}} \rightarrow 0, \quad t_1 \rightarrow \infty \text{ ou } t_2 \rightarrow \infty, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, m_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2,$$

ce que nous verrons à la page suivante.

L'intégrale double

$$\iint \left| \frac{\partial^{m_1+m_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2}} \right| dt_1 dt_2$$

est supposée convergente. Donc, il en est de même de l'intégrale

$$\iint \frac{\overline{B}_{m_1}(t_1)}{m_1!} \frac{\overline{B}_{m_2}(t_2)}{m_2!} \frac{\partial^{m_1+m_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2.$$

En même temps, les intégrales

$$\int \left| \frac{\partial^{m_\alpha+i_\beta} f(t_1, t_2)}{\partial t_\alpha^{m_\alpha} \partial t_\beta^{i_\beta}} \right| dt_\alpha, \quad i_\beta = 0, 1, \dots, m_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta,$$

Beweis eines analytischen Satzes des Herrn de la Vallée Poussin (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, t. 24, 1915, p. 250—278).

M. KRAUSE aussi a donné des formules sommatoires Euler—MacLauriniennes pour les fonctions de deux variables. *Sur une formule sommatoire dans la théorie des fonctions à deux variables* (Comptes rendus, t. 135, 1902, p. 1045—1048); *Über Bernoullische Zahlen und Funktionen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Grössen* (Berichte über die Verhandlungen d. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig, Math. phys. Klasse, t. 55, 1903, p. 39—62); *Zur Theorie der Funktionen zweier veränderlichen Grössen* (ibid., t. 57, 1905, p. 107—152). Cependant, les formules y données ne sont pas des plus simples

convergent. Donc, les intégrales des sommes simples du second membre de (14) n'offrent aucune difficulté.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier

$$\frac{\partial^{i_1+i_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{i_2}} \rightarrow 0, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, m_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2.$$

En effet, la convergence de l'intégrale

$$\int \int \frac{\partial^{m_1+m_2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2$$

entraîne

$$\frac{\partial^{m_1+m_2-2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{m_1-1} \partial t_2^{m_2-1}} \rightarrow s, \quad t_1 \rightarrow \infty \text{ ou } t_2 \rightarrow \infty,$$

s étant une limite finie. Et des intégrales simples à la page précédente il résulte

$$\frac{\partial^{m_\alpha-1+i_\beta} f(t_1, t_2)}{\partial t_\alpha^{m_\alpha-1} \partial t_\beta^{i_\beta}} \rightarrow s, \quad t_\alpha \rightarrow \infty.$$

En vertu du théorème de M. LITTLEWOOD, les relations

$$f(t_1, t_2) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{m_\alpha-1} f}{\partial t_\alpha^{m_\alpha-1}} \rightarrow s, \quad t_\alpha \rightarrow \infty,$$

entraînent

$$\frac{\partial^{i_\alpha} f}{\partial t_\alpha^{i_\alpha}} \rightarrow 0, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, m_\alpha - 2.$$

Et, les intégrales

$$\int \frac{\partial^{i_\alpha} f(t_1, t_2)}{\partial t_\alpha^{i_\alpha}} dt_\beta, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, m_\alpha - 1$$

étant convergentes, le théorème nous donne maintenant tant

$$\frac{\partial^{m_\alpha-1+i_\beta} f}{\partial t_\alpha^{m_\alpha-1} \partial t_\beta^{i_\beta}} \rightarrow 0, \quad t_\beta \rightarrow \infty, \quad i_\beta = 0, 1, \dots, m_\beta - 2,$$

que, plus généralement,

$$\frac{\partial^{i_1+i_2} f}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{i_2}} \rightarrow 0, \quad t_1 \rightarrow \infty \text{ ou } t_2 \rightarrow \infty, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, m_{\alpha-1}, \quad \alpha = 1, 2.$$

L'énoncé est donc démontré.

Exemple. — Considérons la fonction

$$f(x, y) = \frac{e^{ix^{a_1} + y^{a_2}}}{x^{b_1} y^{b_2}}, \quad 0 < a_i \leq 1, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

On trouve

$$\frac{\partial^{i_1+i_2} f}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}} \sim \frac{e^{i(x^{a_1}+y^{a_2})}}{x^{b_1+i_1(1-a_1)} y^{b_2+i_2(1-a_2)}},$$

et l'on voit que la fonction satisfait aux conditions du théorème.

On pourrait énoncer un théorème analogue pour les séries et les intégrales p^{uples} . Cependant, le texte en deviendrait un peu long.

§ 15. Dans ce paragraphe et dans le suivant nous ne considérerons plus la fonction $f(t_1, t_2)$ et la série et l'intégrale doubles qui en dérivent, mais la fonction $f(z)$ et la série et l'intégrale doubles qu'on en déduit

$$\sum_{\infty, \infty} f(x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) \quad \text{et} \quad \int \int_{\infty, \infty} f(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2.$$

La formule fondamentale (22) de ce paragraphe est donnée originairement par M. NÖRLUND, qui exprime pourtant le terme reste sous une forme différente.

Partons de l'intégrale double

$$(15) \quad F_m(x) = \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_m^{(2)}(t_1 + t_2)}{m!} f^{(m)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2,$$

où $B_m^{(2)}(t_1 + t_2)$ est le polynome de BERNOULLI à deux variables, défini dans le Chapitre I; ω_1, ω_2 sont les deux paramètres du polynome de BERNOULLI.

Intégrons (15) m fois par parties par rapport à t_2 ; en observant la relation

$$D_z \frac{B_m^{(2)}(z)}{m!} = \frac{B_{m-1}^{(2)}(z)}{(m-1)!},$$

nous obtenons

$$F_m(x) = \int_0^{\omega_1} \left[\sum_{s=1}^m (-1)^{m-s} \int_0^{\omega_2} \frac{B_s^{(2)}(t_1 + t_2)}{s!} f^{(s-1)}(x + t_1 + t_2) + (-1)^m \int_0^{\omega_2} f(x + t_1 + t_2) dt_2 \right] dt_1,$$

où, comme à l'ordinaire, le symbole $\int_a^b f(z)$ désigne $f(b) - f(a)$.

Dans cette formule, substituons

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_1} \frac{B_s^{(2)}(t_1 + t_2)}{s!} f^{(s-1)}(x + t_1 + t_2) dt_1 &= \sum_{i=2}^s (-1)^{s-i} \int_0^{\omega_1} \frac{B_i^{(2)}(t_1 + t_2)}{i!} f^{(i-2)}(x + t_1 + t_2) \\ &\quad + (-1)^{s-1} \int_0^{\omega_1} B_1^{(2)}(t_1 + t_2) f(x + t_1 + t_2) dt_1, \end{aligned}$$

expression obtenue par intégration par parties s fois itérée. On trouve

$$F_m(x) = \sum_{s=1}^m \sum_{i=2}^s (-1)^{n_i} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_i^{(2)}(t_1 + t_2)}{i!} f^{(i-2)}(x + t_1 + t_2) \\ + \sum_{s=1}^m (-1)^{m-1} \int_0^{\omega_2} \int_0^{\omega_1} B_1^{(2)}(t_1 + t_2) f(x + t_1 + t_2) dt_1 + (-1)^m \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2,$$

d'où

$$(16) \quad (-1)^m F_m(x) = \sum_{i=2}^m (-1)^i (m - i + 1) \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_i^{(2)}(t_1 + t_2)}{i!} f^{(i-2)}(x + t_1 + t_2) \\ - m \int_0^{\omega_2} \int_0^{\omega_1} B_1^{(2)}(t_1 + t_2) f(x + t_1 + t_2) dt_1 + \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2.$$

Rappelons nous maintenant les équations (5) et (5') du § 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_i^{(2)}(\omega_1) = B_i^{(2)} + \omega_1 \omega_2^{i-1} i B_{i-1} \\ B_i^{(2)}(\omega_2) = B_i^{(2)} + \omega_1^{i-1} \omega_2 i B_{i-1} \\ B_i^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = B_i^{(2)} + (\omega_1 \omega_2^{i-1} + \omega_1^{i-1} \omega_2) i B_{i-1}, \quad i \neq 2 \\ B_2^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = B_2^{(2)}. \end{array} \right.$$

En tenant compte de ces formules, nous voulons ramener le second membre de (16) à une somme d'intégrales. On a d'abord:

$$\int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_i^{(2)}(t_1 + t_2)}{i!} f^{(i-2)}(x + t_1 + t_2) = \frac{B_i^{(2)}(\omega_1 + \omega_2)}{i!} f^{(i-2)}(x + \omega_1 + \omega_2) \\ - \frac{B_i^{(2)}(\omega_1)}{i!} f^{(i-2)}(x + \omega_1) - \frac{B_i^{(2)}(\omega_2)}{i!} f^{(i-2)}(x + \omega_2) + \frac{B_i^{(2)}}{i!} f^{(i-2)}(x).$$

On en tire

$$\int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_i^{(2)}(t_1 + t_2)}{i!} f^{(i-2)}(x + t_1 + t_2) = \frac{B_i^{(2)}}{i!} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\ + \frac{\omega_1^{i-1} \omega_2 B_{i-1}}{(i-1)!} \int_0^{\omega_1} f^{(i-1)}(x + t_1 + \omega_2) dt_1 + \frac{\omega_1 \omega_2^{i-1} B_{i-1}}{(i-1)!} \int_0^{\omega_2} f^{(i-1)}(x + \omega_1 + t_2) dt_2,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(17) \quad \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_i^{(2)}(t_1 + t_2)}{i!} f^{(i-2)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 = \frac{B_i^{(2)}(\omega_1 + \omega_2)}{i!} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\ + \frac{\omega_1^{i-1} \omega_2 B_{i-1}}{(i-1)!} \int_0^{\omega_1} f^{(i-1)}(x + t_1) dt_1 + \frac{\omega_1 \omega_2^{i-1} B_{i-1}}{(i-1)!} \int_0^{\omega_2} f^{(i-1)}(x + t_2) dt_2, \quad i \neq 2,$$

et

$$(18) \quad \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_2^{(2)}(t_1 + t_2)}{2!} f(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 = \frac{B_2^{(2)}(\omega_1 + \omega_2)}{2!} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f''(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\ - \omega_1 \omega_2 B_1 \int_0^{\omega_1} f'(x + t_1) dt_1 - \omega_1 \omega_2 B_1 \int_0^{\omega_2} f'(x + t_2) dt_2 + \omega_1 \omega_2 f(x).$$

De même, nous arrivons à

$$(19) \quad \int_0^{\omega_2} \int_0^{\omega_1} B_1^{(2)}(t_1 + t_2) f(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 = B_1^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f'(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\ - \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 + \omega_2 \int_0^{\omega_1} f(x + t_1) dt_1 + \omega_1 \int_0^{\omega_2} f(x + t_2) dt_2.$$

Substituons les expressions (17), (18) et (19) dans le développement (16). En se rappelant les égalités

$$(6) \quad (-1)^i B_i^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = B_i^{(2)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

et

$$(-1)^i B_{i-1} = -B_{i-1}, \quad i = 3, 4, 5, \dots,$$

on trouve

$$(-1)^m F_m(x) = \sum_{i=0}^m (m-i+1) \frac{B_i^{(2)}}{i!} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\ - \sum_{i=1}^m (m-i+1) \omega_1^{i-1} \omega_2 \frac{B_{i-1}}{(i-1)!} \int_0^{\omega_1} f^{(i-1)}(x + t_1) dt_1 \\ - \sum_{i=1}^m (m-i+1) \omega_1 \omega_2^{i-1} \frac{B_{i-1}}{(i-1)!} \int_0^{\omega_2} f^{(i-1)}(x + t_2) dt_2 + (m-1) \omega_1 \omega_2 f(x).$$

Cette relation peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 (20) \quad (m-1) \omega_1 \omega_2 f(x) = & - \sum_{i=0}^m (m+i+1) \frac{B_i^{(2)}}{i!} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\
 & + (-1)^m \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_m^{(2)}(t_1+t_2)}{m!} f^{(m)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\
 & + \sum_{i=0}^{m-1} (m-i) \omega_1^i \omega_2 \frac{B_i}{i!} \int_0^{\omega_1} f^{(i)}(x+t_1) dt_1 + \sum_{i=0}^{m-1} (m-i) \omega_1 \omega_2^i \frac{B_i}{i!} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x+t_2) dt_2.
 \end{aligned}$$

Remplaçons m par $m-1$ dans cette identité et tirons de la formule (20) cette nouvelle égalité. Il en résulte

$$\begin{aligned}
 (21) \quad - \omega_1 \omega_2 f(x) = & \sum_{i=0}^m \frac{B_i^{(2)}}{i!} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\
 & + (-1)^{m+1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_m^{(2)}(t_1+t_2)}{m!} f^{(m)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\
 & - (-1)^m \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_1+t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\
 & - \sum_{i=0}^{m-1} \omega_1^i \omega_2 \frac{B_i}{i!} \int_0^{\omega_1} f^{(i)}(x+t_1) dt_1 - \sum_{i=0}^{m-1} \omega_1 \omega_2^i \frac{B_i}{i!} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x+t_2) dt_2,
 \end{aligned}$$

formule qu'on peut encore, en se rappelant l'identité (10), mettre sous cette forme définitive

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \omega_1 \omega_2 f(x) = & \sum_{i=0}^m \frac{B_i^{(2)}}{i!} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\
 & + (-1)^{m+1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_m^{(2)}(t_1+t_2)}{m!} f^{(m)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\
 & - (-1)^m \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_1+t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\
 & + (-1)^m \omega_2 \int_0^{\omega_1} \frac{B_{m-1}(t_1)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1) dt_1 + (-1)^m \omega_1 \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}(t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_2) dt_2, \quad m > 1.
 \end{aligned}$$

C'est là le résultat que nous avons en vue préalablement.

Nous aurions, d'ailleurs, pu atteindre notre identité en effectuant sur $F_m(x)$ ν intégrations doubles par parties, si $m = 2\nu$ ou $m = 2\nu + 1$. Cependant, dans ce cas, nous aurions eu à traiter m pair et m impair séparément.

Avant de passer à l'étude de la convergence ou divergence simultanée de la série double $\sum f(m+n)$ et de l'intégrale double $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x+y) dx dy$, nous donnerons encore quelques autres formes du reste de la formule (22):

$$(23) \quad R_m^{(2)} = (-1)^{m+1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_m^{(2)}(t_1+t_2)}{m!} f^{(m)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\ - (-1)^m \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_1+t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\ + (-1)^m \omega_2 \int_0^{\omega_1} \frac{B_{m-1}(t_1)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1) dt_1 + (-1)^m \omega_1 \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}(t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_2) dt_2.$$

En vertu de la formule (8), on a

$$(23') \quad R_m^{(2)} = (-1)^{m+1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_m^{(2)}(t_1+t_2)}{m!} f^{(m)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\ - (-1)^m \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_1+t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\ + (-1)^m \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_1+t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1) dt_1 dt_2 + (-1)^m \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_1+t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_2) dt_1 dt_2,$$

ce qu'on peut encore écrire sous la forme

$$(23'') \quad R_m^{(2)} = \Delta (-1)^m \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_1+t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\ + \sum_{\alpha=1}^2 (-1)^m \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_1+t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_\alpha) dt_1 dt_2,$$

où le symbole Δ a rapport à m

$$\Delta f(m) = f(m+1) - f(m).$$

La forme que nous venons de donner au reste $R_m^{(2)}$, nous la pouvons, en effet, généraliser immédiatement au cas de plusieurs variables.

Remarquons encore, en passant, qu'on peut tirer des formules (10) et (22) certaines valeurs moyennes, qui, dans certaines circonstances, peuvent être utiles.

Partons de

$$(10) \quad \omega f(x) = \sum_{i=0}^m \frac{\omega^i B_i}{i!} \int_0^\omega f^{(i)}(x+t) dt + (-1)^{m+1} \int_0^\omega \frac{B_m(t)}{m!} f^{(m)}(x+t) dt, \quad m > 0.$$

Formons la somme des deux membres en faisant prendre à m les valeurs 1, 2, 3, ... m . En rangeant autrement quelques termes, on trouve

$$m \omega f(x) = \sum_{i=0}^m (m-i+1) \frac{\omega^i B_i}{i!} \int_0^\omega f^{(i)}(x+t) dt + \sum_{i=0}^m (-1)^{i+1} \int_0^\omega \frac{B_i(t)}{i!} f^{(i)}(x+t) dt.$$

En répétant ce procédé p fois et en tenant compte de l'identité

$$(24) \quad \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{m-1}{p} + \binom{m}{p} = \binom{m+1}{p+1},$$

on arrive à l'égalité

$$(25) \quad \binom{m-1+p}{p} \omega f(x) = \sum_{i=0}^m \binom{m-i+p}{p} \frac{\omega^i B_i}{i!} \int_0^\omega f^{(i)}(x+t) dt \\ + \sum_{i=0}^m (-1)^{i+1} \binom{m-i+p-1}{p-1} \int_0^\omega \frac{B_i(t)}{i!} f^{(i)}(x+t) dt,$$

qui peut encore s'écrire sous la forme d'une moyenne arithmétique, avec le facteur $\binom{m-1+p}{p}$ dans les dénominateurs du second membre. Ce ne sont, certes, que les cas $p=0, 1$ qui aient un intérêt considérable.

Partons de même de la formule (22), qui est valable pour $m > 1$. Nous pouvons procéder comme tout à l'heure, c'est à dire former la somme des deux membres pour $m=2, 3, 4, \dots, m$ et répéter ce procédé p fois. En effet, en tenant compte de l'égalité (24), on vérifie aisément, les identités suivantes

$$\sum_{\mu_p=2}^m \sum_{\mu_{p-1}=2}^{\mu_p} \dots \sum_{\mu_1=2}^{\mu_2} \sum_{i=\nu}^{\mu_1} a_i = \begin{cases} \sum_{i=\nu}^m \binom{m-i+p}{p} a_i, & \nu \geq 2 \\ \sum_{i=1}^m \binom{m-i+p}{p} a_i - \binom{m+p-2}{p-1} a_1, & \nu = 1 \\ \sum_{i=0}^m \binom{m-i+p}{p} a_i - \binom{m+p-2}{p-1} a_1 + \left[\binom{m+p-2}{p} - \binom{m+p}{p} \right] a_0, & \nu = 0 \end{cases}$$

Effectuons maintenant l'opération $\sum_{\mu_p=2}^m \sum_{\mu_{p-1}=2}^{\mu_p} \dots \sum_{\mu_1=2}^{\mu_2}$ sur les termes de la formule

(22). En faisant quelques réductions faciles, on trouve l'identité

$$\begin{aligned} \binom{m-2+p}{p} \omega_1 \omega_2 f(x) &= \sum_{i=0}^m \binom{m-i+p}{p} \frac{B_i^{(2)}}{i!} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\ &+ \sum_{i=0}^m (-1)^{i+1} \binom{m-i+p-2}{p-2} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_i^{(2)}(t_1+t_2)}{i!} f^{(i)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i+1} \binom{m-i+p-2}{p-1} \left[\omega_2 \int_0^{\omega_1} \frac{B_i(t_1)}{i!} f^{(i)}(x+t_1) dt_1 + \omega_1 \int_0^{\omega_2} \frac{B_i(t_2)}{i!} f^{(i)}(x+t_2) dt_2 \right]. \end{aligned}$$

§ 16. Moyennant la formule établie tout à l'heure, on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème. — *La série double*

$$\sum_{\nu_1, \nu_2}^{\infty, \infty} f(x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2)$$

et l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2$$

sont ou convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux, si la fonction $f(z)$ tend vers zéro pour z grandissant indéfiniment

$$f(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty;$$

si $f(z)$ admet une dérivée continue de l'ordre m ($m \geq 2$); si l'intégrale

$$\int_0^\infty f(z) dz$$

est convergente;

et si, enfin, l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f^{(m-1)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2$$

est absolument convergente.

Considérons l'identité (22)

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \omega_1 \omega_2 f(x) &= \sum_{i=0}^m \frac{B_i^{(2)}}{i!} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\
 &+ (-1)^{m+1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_m^{(2)}(t_1 + t_2)}{m!} f^{(m)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\
 &+ (-1)^{m+1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_1 + t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\
 &+ (-1)^m \omega_2 \int_0^{\omega_1} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_1)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x + t_1) dt_1 + (-1)^m \omega_1 \int_0^{\omega_2} \frac{B_{m-1}^{(2)}(t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x + t_2) dt_2.
 \end{aligned}$$

Posons $x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2$ au lieu de x et formons la somme pour $\nu_\alpha = 0, 1, 2, \dots, n_\alpha - 1$, $\alpha = 1, 2$. On trouve

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \omega_1 \omega_2 \sum_{\nu_1=0, \nu_2=0}^{n_1-1, n_2-1} f(x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) &= \\
 &= \sum_{i=0}^m \frac{B_i^{(2)}}{i!} \sum_{\nu_1=0, \nu_2=0}^{n_1-1, n_2-1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x + t_1 + t_2 + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) dt_1 dt_2 + \sum_{\nu_1=0, \nu_2=0}^{n_1-1, n_2-1} \bar{R}_m^{(2)},
 \end{aligned}$$

$\bar{R}_m^{(2)}$ désignant l'expression (23), où x a été remplacé par $x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2$.

Par un changement de variables, on a

$$\int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x + t_1 + t_2 + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) dt_1 dt_2 = \int_{\nu_1 \omega_1}^{(\nu_1+1)\omega_1} \int_{\nu_2 \omega_2}^{(\nu_2+1)\omega_2} f^{(i)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2;$$

par suite, on obtient

$$(27) \quad \sum_{\nu_1=0, \nu_2=0}^{n_1-1, n_2-1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f^{(i)}(x + t_1 + t_2 + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) dt_1 dt_2 = \int_0^{n_1 \omega_1} \int_0^{n_2 \omega_2} f^{(i)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2.$$

Le premier terme du reste $\sum \bar{R}_m^{(2)}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 (28) \quad (-1)^{m+1} \sum_{\nu_1=0, \nu_2=0}^{n_1-1, n_2-1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \frac{B_m^{(2)}(t_1 + t_2)}{m!} f^{(m)}(x + t_1 + t_2 + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) dt_1 dt_2 &= \\
 &= (-1)^{m+1} \int_0^{n_1 \omega_1} \int_0^{n_2 \omega_2} \frac{\bar{B}_m^{(2)}(t_1 + t_2)}{m!} f^{(m)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2;
 \end{aligned}$$

et, m remplacé par $m-1$, la même expression est valable pour le second terme du reste. Dans le second membre de l'égalité (28), la fonction périodique $\bar{B}_m^{(2)}(t_1+t_2)$ se définit par la fonction périodique $\bar{B}_i(t)$ du § 10 exactement comme le polynôme de BERNOLLI double $B_m^{(2)}(t_1+t_2)$ se définit par le polynôme simple $B_i(t)$, c'est à dire

$$\bar{B}_m^{(2)}(t_1+t_2) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \bar{B}_i(t_1 | \omega_1) \bar{B}_{m-i}(t_2 | \omega_2).$$

Quant au troisième terme du reste $\Sigma \bar{R}_m^{(2)}$, on a d'abord

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_1=0}^{n_1-1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2-1} \omega_2 \int_0^{\omega_1} \frac{B_{m-1}(t_1)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1+\nu_1\omega_1+\nu_2\omega_2) dt_1 = \\ = \omega_2 \sum_{\nu_2=0}^{n_2-1} \int_0^{n_1\omega_1} \frac{\bar{B}_{m-1}(t_1)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1+\nu_2\omega_2) dt_1. \end{aligned}$$

Or, de l'identité (10) on tire

$$\begin{aligned} \omega \sum_{\nu=0}^{n-1} f(x+\nu\omega) = \sum_{i=0}^{\mu} \int_0^{n\omega} \frac{\omega^i B_i}{i!} f^{(i)}(x+z) dz \\ + (-1)^{\mu+1} \int_0^{n\omega} \frac{\bar{B}_{\mu}}{\mu!} f^{(\mu)}(x+z) dz, \quad \mu > 0. \end{aligned}$$

En appliquant cette égalité, en donnant à μ la valeur 1, le troisième terme devient

$$\begin{aligned} (29) \quad \int_0^{n_1\omega_1} \int_0^{n_2\omega_2} \frac{\bar{B}_{m-1}(t_1)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\ + \omega_2 B_1 \int_0^{n_1\omega_1} \int_0^{n_2\omega_2} \frac{\bar{B}_{m-1}(t_1)}{(m-1)!} f^{(m)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2 \\ + \int_0^{n_1\omega_1} \int_0^{n_2\omega_2} \frac{\bar{B}_{m-1}(t_1) \bar{B}_1(t_2)}{(m-1)!} f^{(m)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Il en est de même, *mutatis mutandis*, pour le quatrième terme du reste.

Substituons maintenant les expressions (27), (28) et (29) dans l'égalité (26).

Il s'ensuivra

$$\begin{aligned}
(26') \quad \omega_1 \omega_2 \sum_{\nu_1=0, \nu_2=0}^{n_1-1, n_2-1} f(x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) &= \sum_{i=0}^m \frac{B_i^{(2)}}{i!} \int_0^{n_1 \omega_1} \int_0^{n_2 \omega_2} f^{(i)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\
&+ (-1)^{m+1} \int_0^{n_1 \omega_1} \int_0^{n_2 \omega_2} \frac{\bar{B}_m^{(2)}(t_1 + t_2)}{m!} f^{(m)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\
&+ (-1)^{m+1} \int_0^{n_1 \omega_1} \int_0^{n_2 \omega_2} \frac{\bar{B}_{m-1}^{(2)}(t_1 + t_2)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\
&+ (-1)^m \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \int_0^{n_1 \omega_1} \int_0^{n_2 \omega_2} \frac{\bar{B}_{m-1}(t_\alpha)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \right. \\
&+ \omega_\beta B_1 \int_0^{n_1 \omega_1} \int_0^{n_2 \omega_2} \frac{\bar{B}_{m-1}(t_\alpha)}{(m-1)!} f^{(m)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \\
&\left. + \int_0^{n_1 \omega_1} \int_0^{n_2 \omega_2} \frac{\bar{B}_{m-1}(t_\alpha) \bar{B}_1(t_\beta)}{(m-1)!} f^{(m)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 \right\}, \quad \beta = 1, 2, \quad \beta \neq \alpha.
\end{aligned}$$

Faisons maintenant tendre n_1 et n_2 vers l'infini. Le premier membre de (26') nous donne la série double

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} f(x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2).$$

Le premier terme de la somme $\sum_{i=0}^m$ du second membre est précisément l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2.$$

Le second terme de la même somme, ou l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f'(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2,$$

est convergente en vertu de l'hypothèse concernant l'intégrale

$$\int_0^\infty f(z) dz.$$

Les autres intégrales de la somme,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f^{(i)}(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2, \quad i = 2, 3, \dots, m,$$

n'offrent pas de difficulté. Car, par hypothèse, on a

$$f(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty;$$

et l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |f^{(m)}(x+t_1+t_2)| dt_1 dt_2$$

est convergente, d'où

$$f^{(m-2)}(z) \rightarrow s, \quad z \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, suivant le théorème de M. LITTLEWOOD, on a

$$f^{(i)}(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-3.$$

Enfin, l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f^{(m-1)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2$$

est absolument convergente, et on en conclut, à l'aide de la formule de TAYLOR, sans difficulté, qu'il en est de même pour l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f^{(m)}(x+t_1+t_2) dt_1 dt_2.$$

Donc, toutes les intégrales doubles dérivant du reste convergent aussi.

Le théorème énoncé est donc établi.

Exemple. — La fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz^\alpha}}{z^\beta}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \alpha + \beta > 1,$$

satisfait aux conditions du théorème. Donc, la série et l'intégrale doubles

$$\sum_{a,b} \frac{e^{i(am+bn+c)^\alpha}}{(am+bn+c)^\beta} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{i(ax+by+c)^\alpha}}{(ax+by+c)^\beta} dx dy$$

convergent et divergent en même temps.

§ 17. Les méthodes et les résultats des §§ 15—16 peuvent être étendues à des séries et des intégrales multiples. En appliquant parfaitement le raisonnement du § 15, et en tenant compte des propriétés des polynômes de BERNOULLI multiples données dans le § 3, on trouvera, après des calculs très longs il est vrai, pour $m > p - 1$, l'identité suivante:

$$(22 \text{ a}) \quad \omega_1 \omega_2 \dots \omega_p f(x) = \sum_{i=0}^m \frac{B_i^{(p)}}{i!} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \dots \int_0^{\omega_p} f^{(i)}(x+t_1+t_2+\dots+t_p) dt_1 dt_2 \dots dt_p + R_m^{(p)},$$

où le terme reste $R_m^{(p)}$ a la forme

$$\sum_{i=1}^p \sum_i \Delta^{p-i} (-1)^{m-p+2} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \dots \int_0^{\omega_p} \frac{B_{m-p+1}^{(p)}(t_1 + t_2 + \dots + t_p)}{(m-p+1)!} f^{(m-p+1)}(x + t_{\alpha_i} + t_{\alpha_{i+1}} + \dots + t_{\alpha_p}) dt_1 dt_2 \dots dt_p$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p = 1, 2, \dots, p; \quad \alpha_i \neq \alpha_{i+1} \neq \dots \neq \alpha_p;$$

le symbole Δ^i désignant l'opération

$$\Delta^i \varphi(m) = \varphi(m+i) - \binom{i}{1} \varphi(m+i-1) + \dots + (-1)^i \varphi(m),$$

et le signe $\sum_i$ se rapportant aux combinaisons, au nombre de $\frac{p!}{(i-1)! (p-i+1)!}$, des indices $1, 2, \dots, p$ pris $p-i+1$ à la fois.

Ceci posé nous n'avons, pour établir l'analogie du théorème du § 16, qu'à procéder comme dans le paragraphe cité. Cela nécessiterait cependant d'assez longs raisonnements que nous nous dispenserons de développer ici.

CHAPITRE III.

Quelques théorèmes de transformation.

I. Séries simples.

§ 18. Dans son *Cours d'Analyse*, CAUCHY¹ a démontré un théorème, qu'on a souvent appelé *le théorème de condensation de CAUCHY*. Ordinairement, on lui a donné la forme suivante²:

Soit une série à termes positifs et décroissants

$$\sum f(n);$$

elle converge et diverge en même temps que la série

$$\sum a^n f(a^n),$$

si l'on a

$$a > 1.$$

Les démonstrations de ce théorème figurant dans la littérature n'étant pas parfaitement exactes, nous commencerons ce chapitre en donnant deux démonstrations tout à fait rigoureuses du théorème.

En désignant, suivant l'usage, par $E(x)$ le plus grand entier inférieur à x , l'on aura les inégalités

$$(30) [E(a^p) - E(a^{p-1})] f(E(a^p)) \leq f(E(a^{p-1}) + 1) + \dots + f(E(a^p)) \leq [E(a^p) - E(a^{p-1})] f(E(a^{p-1}) + 1).$$

En vertu des propriétés de la fonction $E(x)$, on a

$$E(x) \leq x \quad \text{pour } x \geq 0$$

et

$$E(x) \geq \frac{x}{2} \quad \text{pour } x \geq 1.$$

Il suit de là

$$(31) \quad E(a^p) - E(a^{p-1}) \geq E(a^p - a^{p-1}) \geq \frac{a^p - a^{p-1}}{2} = a^p \cdot \frac{a - 1}{2a}$$

et

$$(32) \quad E(a^p) - E(a^{p-1}) < E(a^p) \leq a^p = a \cdot a^{p-1}.$$

¹ *Œuvres complètes*, 2^e sér., t. 3, Paris, 1897, p. 123—124.

² Voir, par exemple, BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, Paris, 1902, p.^s 3—4.

En tenant compte de ces dernières inégalités, les relations (30) deviennent

$$\frac{a-1}{2a} \cdot a^p f(a^p) \leq f(E(a^{p-1}) + 1) + \dots + f(E(a^p)) < a \cdot a^{p-1} f(a^{p-1}).$$

Faisons varier p de 1 à ∞ , on trouve

$$\frac{a-1}{2a} \sum_{p=1}^{\infty} a^p f(a^p) \leq \sum_{p=2}^{\infty} f(p) < a \sum_{p=0}^{\infty} a^p f(a^p).$$

Le théorème de CAUCHY est prouvé.

A l'aide des théorèmes des § 4 et § 5, on peut encore donner cette démonstration simple:

Suivant le théorème de CAUCHY du § 4, la série et l'intégrale

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} f(x) dx$$

convergent et divergent en même temps.

En vertu du théorème du § 5, il en est de même pour la série et l'intégrale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n f(a^n) \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} a^x f(a^x) dx.$$

Car on a

$$\frac{a^{x+1} f(a^{x+1})}{a^x f(a^x)} \leq a^1.$$

A l'aide de la substitution $x = a^t$, l'intégrale

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

devient

$$\log a \int_1^{\infty} a^x f(a^x) dx,$$

d'où le théorème.

Ce théorème élégant est susceptible de généralisations dans plusieurs directions. En considérant toujours des séries à termes positifs et décroissants, M. GOUWENTAK¹, par exemple, a démontré que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} ap^n f(ap^n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a + bn)^{p-1} f((a + bn)^p)$$

convergent et divergent en même temps. Et M. KLUYVER² a immédiatement approfondi ce fait en démontrant que les séries

¹ *Eene uitbreiding van een tweetal convergentiekenmerken* (Nieuw Archief voor Wiskunde, 2^e sér., t. 8, 1909, p. 370—372).

² *Eene uitbreiding van het convergentiekenmerk van Cauchy* (ibid., p. 373—374).

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) f(a_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) f(a_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n f(a_n)$$

sont en même temps toutes convergentes ou toutes divergentes, a_n désignant une suite d'entiers positifs et croissants, et A_n désignant une suite de nombres positifs tels que les rapports

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{A_n} \quad \text{et} \quad \frac{A_{n+1}}{A_n}$$

restent, tous les deux, pour des valeurs suffisamment grandes de n , compris entre deux limites finies.

Cette dernière série $\sum A_n f(a_n)$ nous donne, pour des nombres a_n et A_n convenablement choisis, tant la série de CAUCHY que les séries de M. GOUWENTAK et d'autres semblables.

Mais plus profondes et plus importantes sont les généralisations que nous avons indiquées dans l'introduction. Nous les étudierons dans les paragraphes qui suivent immédiatement.

§ 19. En observant que a^x est essentiellement la dérivée de a^x , le théorème de condensation se ramène à un changement de variables. En tenant compte de ce fait et en employant le théorème de CAUCHY cité dans le § 4, on déduit immédiatement ce théorème:

Théorème. — Soit $f(x)$ une fonction positive et décroissante

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

soit $\varphi(x)$ une fonction positive et croissante

$$\varphi(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

admettant une dérivée décroissante $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Alors les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(\varphi(n)) \varphi'(n)$$

sont ou toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

En effet, la série et l'intégrale

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} f(x) dx$$

convergent et divergent en même temps, en vertu du théorème de CAUCHY. Et il en est de même pour la série et l'intégrale

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\varphi(n)) \varphi'(n) \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx,$$

la dérivée $\varphi'(x)$ étant, évidemment, positive.

Donc, un changement de variables

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

entraîne le théorème.

Certes, en raison de la condition concernant la dérivée $\varphi'(x)$, la portée de ce théorème n'est pas très grande. Si, par exemple, nous choisissons pour $\varphi(x)$ des fonctions logarithmico-exponentielles, il faut borner le choix à des fonctions telles que

$$x^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1; \quad \log_r x, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

et d'autres semblables. L'exponentielle e^x ne satisfait pas à nos conditions et, par conséquent, le théorème ne renferme pas le théorème de condensation de CAUCHY.

§ 20. On peut remplacer la condition concernant $\varphi'(x)$ par une autre moins restrictive. Et nous aurons le théorème suivant qui renferme comme cas particuliers non seulement le théorème précédent mais aussi le théorème de condensation de CAUCHY. De plus, les généralisations de M. GOUWENTAK et de M. KLUYVER se ramènent à ce théorème.

Théorème. — Soit $f(x)$ une fonction positive et décroissante

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

soit $\varphi(x)$ une fonction positive et croissante

$$\varphi(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

admettant une dérivée continue et positive $\varphi'(x)$ satisfaisant à la condition qu'il y ait, correspondant à tout nombre positif θ , une constante positive c telle que

$$\frac{\varphi'(x + \theta)}{\varphi'(x)} < c, \quad \theta > 0,$$

Alors, les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(\varphi(n)) \varphi'(n)$$

convergent et divergent en même temps.

La démonstration repose sur les théorèmes sur la relation entre séries et intégrales du § 4 et du § 5. Nous nous contentons de ces indications, la démonstration coïncidant presque mot pour mot avec celle du théorème précédent.

Exemples. — En considérant encore les fonctions logarithmico-exponentielles, nous verrons qu'on peut choisir pour $\varphi(x)$ les fonctions

$$a^x; \quad x^\alpha, \quad \alpha \text{ arbitraire}; \quad \log_r x, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

et d'autres semblables. Par suite, les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(a^n) a^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n^\alpha) n^{\alpha-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\log_r n)}{n \log n \dots \log_{r-1} n}$$

convergent et divergent en même temps que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, $f(x)$ étant une fonction positive et décroissante.

Corollaire. — Une conséquence à tirer de ce théorème et qui mérite d'être remarquée est l'observation d'ABEL¹ et de CAUCHY², retrouvée plus tard par M. PRINGSHEIM³, à savoir:

La fonction $f(x)$ étant positive et décroissante, la convergence de la série $\sum f(n)$ entraîne la relation

$$x f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Si non seulement $f(x)$ mais aussi la fonction $x f(x)$ est une fonction décroissante, on peut appliquer le théorème encore une fois. Donc, la convergence de la série $\sum f(n)$ entraîne la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(e^n) e^n e^n,$$

et, par conséquent, on a

$$\log x \cdot x \cdot f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Plus généralement, si non seulement $f(x)$ mais aussi la fonction

$$\log_r x \cdot \log_{r-1} x \dots \log x \cdot x \cdot f(x)$$

est une fonction décroissante, la convergence de la série $\sum f(n)$ entraîne la relation

$$\log_{r+1} x \cdot \log_r x \dots \log x \cdot x \cdot f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Remarque. — A propos des théorèmes des §§ 18—20, il ne sera pas inutile de se rappeler les critères d'ERMAKOFF⁴, valables pour les séries à termes positifs et décroissants, à savoir

$$\lim \left\{ \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \right\} \begin{cases} > 1 & \text{divergence} \\ < 1 & \text{convergence,} \end{cases}$$

où la fonction $\varphi(x)$ est supposée positive et croissante vers l'infini.

Remarquons surtout le cas particulier

$$\lim \left\{ \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \right\} \begin{cases} > 1 & \text{divergence} \\ < 1 & \text{convergence.} \end{cases}$$

§ 21. Les théorèmes de condensation considérés jusqu'ici n'ont eu pour objet que des fonctions $f(x)$ positives et décroissantes. Cette dernière condition, la décroissance de $f(x)$, n'est pas une restriction essentielle. Car une série à termes positifs convergente est *absolument* convergente. Par suite, l'ordre des termes de la série n'a aucune influence sur la question de convergence ou de divergence de la série. On peut donc, en quelque façon, appliquer les théorèmes de condensation des paragraphes précédents à n'importe quelle série à termes positifs. Mais, en général, il

¹ *Œuvres complètes*, nouv. éd., t. 1, Christiania, 1881, p. 399.

² *Œuvres complètes*, 2^e sér., t. 7, Paris, 1889, p. 277—278.

³ *Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern* (*Mathematische Annalen*, t. 35, 1890, p. 297—394). Voir surtout p. 347, 356.

⁴ Voir, par exemple, BROMWICH, *An introduction to the theory of infinite series*, London, 1908, p. 37—38. Voir aussi PRINGSHEIM, loc. cit., p. 392—394.

faut se garder d'appliquer les théorèmes sans précautions. Avant de les employer, il est très souvent nécessaire d'arranger les termes de la série de sorte qu'ils forment une suite décroissante.

Considérons, cependant, la série à termes positifs et décroissants

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Nous avons vu que, sous certaines conditions, la série converge et diverge en même temps que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\varphi(n)) \varphi'(n).$$

Evidemment, il en est de même pour les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}(n) = f(1) + 2f(2) + f(3) + 2f(4) + \dots + f(n-1) + 2f(n) + f(n+1) + \dots,$$

les termes de la série $\sum f(n)$ étant positifs. De plus, les deux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(n) + \dots$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}(n) = F(1) + 2F(2) + F(3) + 2F(4) + \dots + F(n-1) + 2F(n) + F(n+1) + \dots$$

convergent et divergent en même temps, si l'on a supposé la dérivée $\varphi'(x)$ positive.

Donc, les deux séries à termes positifs mais pas nécessairement *constamment* décroissants

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}(\varphi(n)) \varphi'(n)$$

convergent et divergent en même temps, dans les conditions indiquées plus haut.

En réalité, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème. — Soit $f(x)$ une fonction positive et tendant vers zéro

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

et admettons que

$$\frac{f(x+\theta)}{f(x)} < C, \quad 0 < \theta < 1,$$

pour des valeurs suffisamment grandes de x , C étant une constante positive;

soit $\varphi(x)$ une fonction positive et croissante

$$\varphi(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

et supposons qu'elle admette une dérivée continue et positive $\varphi'(x)$ telle que

$$\frac{\varphi'(x+\theta)}{\varphi'(x)} < c, \quad 0 < \theta < 1,$$

pour des valeurs suffisamment grandes de x , c étant encore une constante positive.

Les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(\varphi(n)) \varphi'(n)$$

convergeront et divergeront en même temps.

A l'aide du théorème du § 5 sur la relation entre séries et intégrales, le théorème se démontre parfaitement comme celui du § 19, la démonstration se ramenant au même changement de variables.

Exemple. — Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{a + b \cos x}{x^\alpha}, \quad a > b.$$

On trouve

$$\frac{f(x + \theta)}{f(x)} < \frac{a + b}{a - b}.$$

Par suite, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a + b \cos(e^n)}{e^{\alpha n}}$$

est convergente pour $\alpha > 0$ et divergente pour $\alpha \leq 0$.

Corollaire. — Le corollaire du paragraphe précédent concernant les relations

$$x f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{etc.}$$

s'étend maintenant aux séries convergentes $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, où $f(x)$ est une fonction positive et essentiellement décroissante¹.

Remarque. — Une fonction $f(x)$ tendant vers zéro et jouissant de la propriété

$$\frac{f(x + \theta)}{f(x)} < c, \quad 0 < \theta < 1,$$

c étant une constante positive et finie, s'appellerait bien *essentiellement décroissante*. Cf. la dénomination de M. PRINGSHEIM² »im wesentlichen monoton«.

L'oscillation des termes des séries de cette espèce est beaucoup plus faible que celle d'une série telle que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, où³

$$\left\{ \begin{array}{l} f(n) = \frac{1}{n^2}, \quad n \text{ non carré,} \\ f(n^2) = \frac{1}{n^2}. \end{array} \right.$$

¹ Voir ci-dessous.

² Loc. cit., p. 357, 379.

³ Cf. NIELSEN, *Lærebog i elementær Funktionsteori*, København, 1909, p. 206.

Ici on a

$$\frac{f(n^2)}{f(n^2 - 1)} = \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2} = \left(n - \frac{1}{n}\right)^2,$$

c'est à dire c infini.

Cette série convergente ne peut pas être condensée. Et on n'a pas non plus la relation

$$nf(n) \mapsto 0, \quad n \mapsto \infty.$$

§ 22. Nous ne nous arrêterons pas aux théorèmes de condensation qu'on pourrait établir, en tenant compte des théorèmes du § 6. Mais à l'aide du théorème de M. HARDY dans le § 7, nous pouvons donner un théorème de condensation très simple. Certes, il n'est qu'un cas particulier du théorème du paragraphe suivant; mais, en raison de sa simplicité, nous la traiterons séparément.

Théorème. — Soit $f(x)$ une fonction tendant vers zéro

$$f(x) \mapsto 0, \quad x \mapsto \infty,$$

admettant une dérivée continue $f'(x)$ telle que l'intégrale

$$\int_0^\infty |f'(x)| dx$$

soit convergente.

Soit $\varphi(x)$ une fonction tendant vers l'infini

$$\varphi(x) \mapsto \infty, \quad x \mapsto \infty,$$

et admettant des dérivées continues $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ de signes constants; soit $\varphi'(x)$ bornée

$$|\varphi'(x)| < \text{const.}$$

Alors, les deux séries

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^\infty f(\varphi(n)) \varphi'(n)$$

convergent et divergent en même temps.

En vertu du théorème de M. HARDY, la série et l'intégrale

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty f(x) dx$$

convergent et divergent en même temps. Donc, le théorème se ramène à la transformation

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx,$$

pourvu que la série et l'intégrale

$$\sum_{n=1}^\infty f(\varphi(n)) \varphi'(n) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

soient convergentes et divergentes en même temps. Mais c'est précisément ce qu'on voit en appliquant le théorème de M. HARDY. En effet,

$$\frac{d}{dx}(f(\varphi(x)) \varphi'(x)) = f'(\varphi(x)) \varphi'^2(x) + f(\varphi(x)) \varphi''(x),$$

fonctions qui sont absolument intégrables toutes les deux. Car on a

$$\int_0^\infty |f'(\varphi(x)) \varphi'^2(x)| dx < c \int_0^\infty |f'(\varphi(x)) \varphi'(x)| dx = c \int_0^\infty |f'(x)| dx,$$

qui est convergente, en vertu de l'hypothèse.

Et on a de même

$$\int_0^\infty |f(\varphi(x)) \varphi''(x)| dx < c \int_0^\infty |\varphi''(x)| dx,$$

intégrale qui est encore convergente, le signe de $\varphi''(x)$ étant constant, et la fonction bornée $\varphi'(x)$ tendant vers une limite finie, en vertu du même fait.

On a donc le théorème énoncé.

Exemples. — La fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+i\alpha} (\log x)^{\beta+i\gamma}}, \quad \beta > 0,$$

satisfait aux conditions du théorème; et la série $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ est convergente. En posant, par exemple, $\varphi(x) = x + \log x$, il s'ensuit que la série

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1 + \frac{1}{n}}{(n + \log n)^{1+i\alpha} (\log(n + \log n))^{\beta+i\gamma}}$$

est convergente pour $\beta > 0$.

La fonction

$$f(x) = \frac{e^{ix^a}}{x^b}, \quad 0 < a < 1, \quad b > 0,$$

nous donne également, si l'on suppose $b > a$, un exemple de ce théorème.

§ 23. Comme nous l'avons déjà indiqué, on peut encore donner un théorème de condensation, ou plutôt un théorème de transformation, qui s'applique à des cas plus étendus. C'est là le théorème important de M. NÖRLUND, qui supprime la condition par rapport à $f(x)$ qu'elle soit positive et décroissante, mais qui, au lieu de cela, introduit des conditions plus restrictives par rapport à $\varphi(x)$. Ce théorème peut être appliqué non seulement à des fonctions positives mais aussi à des fonctions d'un caractère beaucoup plus général.

En vertu du théorème de M. LITTLEWOOD, cité dans le § 9, nous donnerons au théorème de M. NÖRLUND la forme suivante:

Théorème. — Soit $f(x)$ une fonction tendant vers zéro

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

et admettant une dérivée $p^{\text{ième}}$ continue ($p \geq 1$), telle que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} |f^{(p)}(x)| dx$$

soit convergente;

soit $\varphi(x)$ une fonction croissante

$$\varphi(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

admettant une dérivée continue de l'ordre $p+1$; soient les dérivées

$$\varphi^{(i)}(x), \quad i = 1, 2, 3, \dots, p+1,$$

de signes constants; et soient les dérivées $\varphi'(x)$ et $\varphi^{(p)}(x)$ bornées

$$|\varphi'(x)| < \text{const.}, \quad |\varphi^{(p)}(x)| < \text{const.}$$

Dans ces conditions, les deux séries

$$\sum f(n) \quad \text{et} \quad \sum f(\varphi(n)) \varphi'(n)$$

sont, en même temps, convergentes et divergentes.

Remarquons que les suppositions relativement à $f(x)$ sont précisément celles qu'exige le théorème du § 10 p. 24 pour affirmer la convergence et la divergence simultanées de la série et l'intégrale

$$\sum f(n) \quad \text{et} \quad \int f(x) dx.$$

La fonction $\varphi(x)$ est constamment croissante, la dérivée $\varphi'(x)$ étant de signe constant, c'est à dire positive. Donc, on a

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx,$$

et de la démonstration, il ne reste qu'à établir la convergence et la divergence simultanées de la série et de l'intégrale

$$\sum f(\varphi(n)) \varphi'(n) \quad \text{et} \quad \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

La dérivée $\varphi'(x)$ a, évidemment, une limite finie, la dérivée $\varphi''(x)$ étant de signe constant. Il en est de même pour la dérivée $\varphi^{(p)}(x)$. En vertu du théorème de M. LITTLEWOOD, il viendra donc

$$\varphi^{(i)}(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad i = 2, 3, \dots, p-1.$$

Posons

$$f(\varphi(x)) \varphi'(x) = F(x).$$

Donc

$$F'(x) = f'(\varphi(x)) \varphi'(x) + f(\varphi(x)) \varphi''(x)$$

et, généralement,

$$F^{(i)}(x) = f^{(i)}(\varphi) (\varphi')^{i+1} + \sum c_r f^{(r)}(\varphi) (\varphi')^{r_1} (\varphi'')^{r_2} \dots (\varphi^{(i)})^{r_i} + f(\varphi) \varphi^{(i+1)},$$

la somme Σ renfermant tous les termes à dérivées $f^{(r)}(\varphi(x))$ des ordres inférieurs à i .

On voit aisément que l'intégrale

$$\int |F^{(p)}(x)| dx$$

est convergente. Considérons le premier terme de $F^{(p)}(x)$. On a

$$\int |f^{(p)}(\varphi(x)) (\varphi'(x))^{p+1}| dx < c \int |f^{(p)}(\varphi(x)) \varphi'(x)| dx = c \int |f^{(p)}(x)| dx$$

intégrale qui, par hypothèse, est convergente.

Quant aux termes de la somme Σ , on a évidemment

$$\int |f^{(r)}(\varphi) (\varphi')^{r_1} \dots (\varphi^{(p)})^{r_p}| dx < c \int |\varphi^{(i)}(x)| dx, \quad i > 1,$$

intégrale, qui est convergente, $\varphi^{(i)}(x)$ étant de signe constant et $\varphi^{(i-1)}(x)$ ayant une limite finie.

De même, l'intégrale

$$\int |f(\varphi(x)) \varphi^{(p+1)}(x)| dx < c \int |\varphi^{(p+1)}(x)| dx$$

est convergente.

Le théorème est donc démontré.

Exemples. — En vertu de ce théorème, on peut «condenser» des séries telles que ¹

$$\sum \frac{e^{in^a}}{n^b}, \quad 0 < a \leq 1, \quad b > 0.$$

En posant $\varphi(x)$ égale à

$$x^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1; \quad \log_r x, \quad r = 1, 2, 3, \dots; \quad x + \log_r x \quad \text{etc.},$$

on obtient des séries telles que

$$\sum \frac{e^{i(\log n)^a}}{n(\log n)^b}, \quad \sum \frac{e^{i(\log_r n)^a}}{n \log n \dots \log_{r-1} n (\log_r n)^b},$$

¹ HARDY, loc. cit., *Proceedings*, etc., 2^e sér., t. 9, 1910, p. 128.

elle converge et diverge en même temps que la série

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} a^m b^n f(a^m, b^n),$$

si l'on a

$$a > 1, \quad b > 1.$$

Le mode de démonstration étant tout à fait général, on peut aisément démontrer un théorème analogue pour les séries multiples à termes positifs et décroissants.

En tenant compte des théorèmes des §§ 11—12, nous donnerons une autre démonstration simple du théorème ci-dessus.

En effet, la série et l'intégrale doubles

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \int \int_{\infty, \infty} f(x, y) dx dy$$

convergent et divergent en même temps, suivant le théorème du § 11. En vertu du théorème du § 12, il en est de même pour la série et l'intégrale

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} a^m b^n f(a^m, b^n) \quad \text{et} \quad \int \int_{\infty, \infty} a^x b^y f(a^x, b^y) dx dy.$$

Donc, la transformation

$$\int \int_{\infty, \infty} f(x, y) dx dy = \log a \log b \int \int_{\infty, \infty} f(a^x, b^y) a^x b^y dx dy$$

entraîne le théorème.

§ 25. L'application des théorèmes établis dans le chapitre précédent va nous donner plusieurs analogies et généralisations du théorème de condensation de CAUCHY pour des séries doubles et multiples. En voici la première:

Théorème. — Soit $f(x, y)$ une fonction positive et décroissante, tant pour x croissant que pour y croissant

$$f(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad y \rightarrow \infty;$$

soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions positives et croissantes

$$\varphi(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{et} \quad \psi(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

admettant des dérivées décroissantes du premier ordre $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$.

Dans ces conditions, les deux séries à double entrée

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(\varphi(m), \psi(n)) \varphi'(m) \psi'(n)$$

sont, en même temps, convergentes et divergentes.

A l'aide du théorème de CAUCHY du § 11, on voit que la série et l'intégrale

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \int \int_{\infty, \infty} f(x, y) dx dy$$

convergent et divergent simultanément.

En vertu des propriétés des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, il en est de même pour

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(\varphi(m), \psi(n)) \varphi'(m) \psi'(n) \quad \text{et} \quad \int \int_{\infty}^{\infty} f(\varphi(x), \psi(y)) \varphi'(x) \psi'(y) dx dy.$$

Ajoutons que

$$\int \int_{\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int \int_{\infty}^{\infty} f(\varphi(x), \psi(y)) \varphi'(x) \psi'(y) dx dy.$$

On aura donc le théorème.

Ce théorème s'étend immédiatement à des séries multiples à termes positifs et décroissants.

§ 26. Plus généralement, considérons deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ayant les propriétés suivantes:

Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des fonctions positives et croissantes

$$\varphi(x) \mapsto \infty \quad \text{et} \quad \psi(x) \mapsto \infty, \quad x \mapsto \infty,$$

admettant des dérivées continues et positives $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$; et supposons qu'à tout nombre positif θ correspond une constante positive c telle qu'on a

$$\frac{\varphi'(x + \theta)}{\varphi'(x)} < c, \quad \frac{\psi'(x + \theta)}{\psi'(x)} < c, \quad \theta > 0.$$

Quant à la fonction $f(x, y)$, elle doit satisfaire aux conditions du théorème précédent.

Dans ce cas, en vertu du théorème du § 12, la série et l'intégrale doubles

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(\varphi(m), \psi(n)) \varphi'(m) \psi'(n) \quad \text{et} \quad \int \int_{\infty}^{\infty} f(\varphi(x), \psi(y)) \varphi'(x) \psi'(y) dx dy$$

restent encore convergentes et divergentes en même temps.

En achevant la démonstration de la même manière que dans le théorème précédent, on aura le théorème:

Théorème. — *Soit $f(x, y)$ une fonction positive et croissante, tant pour x croissant que pour y croissant*

$$f(x, y) \mapsto 0, \quad x \mapsto \infty \quad \text{ou} \quad y \mapsto \infty;$$

soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des fonctions positives et croissantes

$$\varphi(x) \mapsto \infty, \quad x \mapsto \infty, \quad \text{et} \quad \psi(x) \mapsto \infty, \quad x \mapsto \infty,$$

admettant des dérivées continues et positives $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ telles que

$$\frac{\varphi'(x + \theta)}{\varphi'(x)} < c, \quad \frac{\psi'(x + \theta)}{\psi'(x)} < c, \quad \theta > 0.$$

c étant une constante positive.

Dans ces conditions, les séries

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(\varphi(m), \psi(n)) \varphi'(m) \psi'(n)$$

sont ou convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux.

On pourrait encore, d'une manière tout à fait générale, considérer des séries à entrée p^{uple} . On démontrerait sans difficulté le théorème analogue.

Les deux théorèmes des §§ 24—25 sont des cas particuliers de ce théorème. Entre autres cas particuliers, remarquons les analogies des théorèmes de M. GOUWENTAK et de M. KLUYVER. Le théorème de M. KLUYVER se présente sous la forme suivante:

Soit $f(x, y)$ une fonction positive et décroissante pour x croissant et pour y croissant; soient a_m et b_n deux suites d'entiers positifs et croissants; soit $A_{m, n}$ une suite double de nombres positifs telle que les rapports

$$\frac{(a_{m+1} - a_m)(b_{n+1} - b_n)}{A_{m, n}}, \quad \frac{A_{m+1, n}}{A_{m, n}}, \quad \frac{A_{m, n+1}}{A_{m, n}}$$

restent entre des limites finies, pour des valeurs suffisamment grandes de m et de n . Alors les deux séries doubles

$$\sum_{m, n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \sum_{m, n}^{\infty, \infty} A_{m, n} f(a_m, b_n)$$

convergeront et divergeront en même temps.

Corollaire. — En vertu du théorème de ce paragraphe, on arrive aisément à des relations analogues à celles d'ABEL et de M. PRINGSHEIM.

En effet, si la fonction $f(x, y)$ est positive et décroissante pour x croissant ainsi que pour y croissant, et si la série double $\sum f(m, n)$ est convergente, on a toujours la limite

$$x y f(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad y \rightarrow \infty.$$

Et, généralement, si non seulement $f(x, y)$ mais aussi la fonction

$$f(x, y) \cdot x \log x \dots \log_r x \cdot y \log y \dots \log_s y$$

est décroissante pour x croissant ainsi que pour y croissant, la convergence de la série double $\sum f(m, n)$ entraîne la relation

$$f(x, y) \cdot x \log x \dots \log_{r+1} x \cdot y \log y \dots \log_{s+1} y \rightarrow 0$$

pour $x \rightarrow \infty$ ainsi que pour $y \rightarrow \infty$.

§ 27. Nous donnerons encore l'énoncé analogue du théorème du § 21 des séries simples.

Théorème. — Soit $f(x, y)$ une fonction positive qui décroît indéfiniment pour $x \rightarrow \infty$ ainsi que pour $y \rightarrow \infty$

$$f(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad y \rightarrow \infty;$$

et admettons que

$$\frac{f(x + \theta_1, y + \theta_2)}{f(x, y)} < c, \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

c étant une constante positive finie;

soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des fonctions positives et croissantes

$$\varphi(x) \mapsto \infty, \quad x \mapsto \infty, \quad \text{et} \quad \psi(x) \mapsto \infty, \quad x \mapsto \infty,$$

admettant des dérivées continues et positives $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ telles que les rapports

$$\frac{\varphi'(x+\theta)}{\varphi'(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\psi'(x+\theta)}{\psi'(x)} \quad 0 < \theta < 1,$$

restent inférieurs à des constantes positives finies.

Dans ces conditions, les séries doubles

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(\varphi(m), \psi(n)) \varphi'(m) \psi'(n)$$

convergent et divergent en même temps.

Comme auparavant, la démonstration se ramène à un changement de variables

$$\int \int_{\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy = \int \int_{\infty}^{\infty} f(\varphi(x), \psi(y)) \varphi'(x) \psi'(y) \, dx \, dy,$$

la première série étant convergente et divergente en même temps que l'intégrale

$$\int \int_{\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy,$$

et la série transformée étant convergente et divergente en même temps que l'intégrale du second membre, en appliquant le théorème du § 12.

Corollaire. — Les conclusions du paragraphe précédent quant aux fonctions

$$xy f(x, y) \quad \text{etc.}$$

restent encore valables pour les fonctions $f(x, y)$ que nous venons de considérer.

Remarque. — Si, pour x croissant vers l'infini ainsi que pour y augmentant indéfiniment, on a

$$\lim \frac{\varphi'(x) \psi'(y) f(\varphi(x), \psi(y))}{f(x, y)} < 1,$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions positives et croissantes, les séries doubles

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(\varphi(m), \psi(n)) \varphi'(m) \psi'(n)$$

sont convergentes, tandis qu'elles sont divergentes dans le cas contraire.

En particulier, la relation

$$\lim \frac{e^{x+y} f(e^x, e^y)}{f(x, y)} < 1, \quad \text{pour } x \rightarrow \infty \text{ et pour } y \rightarrow \infty,$$

entraîne la convergence de la série double $\sum f(m, n)$, tandis que la série diverge dans le cas contraire, et cette règle sera d'une application facile.

Cette extension des critères d'ERMAKOFF se démontre sans difficulté.

La généralisation du théorème de ce paragraphe à des séries multiples se fait d'elle même.

§ 28. Maintenant, nous supprimons les conditions, par rapport à la fonction $f(x, y)$, qu'elle soit positive et qu'elle décroisse, lorsque x ou y croissent. A l'aide des théorèmes des derniers paragraphes du chapitre précédent, nous allons rechercher les conditions pour que les séries doubles

$$\sum_{m, n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \sum_{m, n}^{\infty, \infty} f(\varphi(m), \psi(n)) \varphi'(m) \psi'(n)$$

convergent et divergent en même temps.

Dans le cas général, c'est à dire le cas correspondant au théorème du § 14, les recherches deviennent très compliquées et les résultats obtenus nous semblent d'assez peu d'utilité. Voilà pourquoi nous nous bornerons à l'étude de quelques cas spéciaux.

En tenant compte du théorème du § 13, nous démontrerons d'abord ce théorème:

Théorème. — Soit $f(x, y)$ une fonction tendant vers zéro pour x et pour y grandissant indéfiniment

$$f(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad y \rightarrow \infty,$$

et admettant des dérivées continues et absolument intégrables (intégrations doubles)

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des fonctions tendant vers l'infini

$$\varphi(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{et} \quad \psi(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

et admettant des dérivées continues $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$, resp. $\psi'(x)$ et $\psi''(x)$, de signes constants;

soient $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ bornées

$$|\varphi'(x)| < \text{const.}, \quad |\psi'(x)| < \text{const.}$$

Alors, les séries doubles

$$\sum_{m, n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \sum_{m, n}^{\infty, \infty} f(\varphi(m), \psi(n)) \varphi'(m) \psi'(n)$$

convergent et divergent en même temps.

Comme auparavant, la démonstration se ramène à un changement de variables

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \int f(\varphi(x), \psi(y)) \varphi'(x) \psi'(y) dx dy.$$

On a donc à démontrer que la série et l'intégrale

$$\sum_{m, n}^{\infty, \infty} f(\varphi(m), \psi(n)) \varphi'(m) \psi'(n) \quad \text{et} \quad \int \int f(\varphi(x), \psi(y)) \varphi'(x) \psi'(y) dx dy$$

convergent et divergent en même temps, la série et l'intégrale

$$\sum_{m, n}^{\infty, \infty} f(m, n) \quad \text{et} \quad \int \int f(x, y) dx dy$$

satisfaisant à cette condition, en vertu du théorème du § 13.

Posons

$$f(\varphi(x), \psi(y)) \varphi'(x) \psi'(y) = F(x, y).$$

On a donc

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} \varphi'^2(x) \psi'(y) + f(\varphi, \psi) \varphi''(x) \psi'(y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \varphi'(x) \psi'^2(y) + f(\varphi, \psi) \varphi'(x) \psi''(y),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(\varphi, \psi)}{\partial \varphi \partial \psi} \varphi'^2(x) \psi'^2(y) + \frac{\partial f(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} \varphi'^2(x) \psi''(y) + \frac{\partial f(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \varphi''(x) \psi'^2(y) + f(\varphi, \psi) \varphi''(x) \psi''(y).$$

La dérivée $\varphi'(x)$ a évidemment une limite finie, le signe de la dérivée $\varphi''(x)$ étant constant et $\varphi'(x)$ étant bornée. Et il en est de même pour la dérivée $\psi'(y)$. Par suite, les intégrales

$$\int \varphi''(x) dx \quad \text{et} \quad \int \psi''(y) dy$$

sont absolument convergentes.

Les intégrales

$$\int \int \frac{\partial f}{\partial x} dx dy, \quad \int \int \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \quad \text{et} \quad \int \int \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy$$

étant supposées absolument intégrables, on voit aisément qu'il en est de même pour les intégrales

$$\int \int \frac{\partial F}{\partial x} dx dy, \quad \int \int \frac{\partial F}{\partial y} dx dy \quad \text{et} \quad \int \int \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy,$$

et le théorème est prouvé.

Exemple. — En se rappelant l'exemple du § 13 (p. 29), on voit que la convergence de la série double

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} \frac{e^{i(m^a + n^b)}}{m^b + n^b}, \quad 0 < a \leq 1, \quad b > a + 1 \quad \text{et} \quad b > 2(1 - a),$$

entraîne, par exemple, celle de la série

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} \frac{e^{i(m + \log m)^2 + n^{\frac{a}{2}} \log^a n}}{(m + \log m)^b + n^{\frac{b}{2}} \log^b n} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{2 + \log n}{2\sqrt{n}}.$$

§ 29. On rencontre souvent des séries doubles ayant la forme

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} f(am + bn + c).$$

Dans ce paragraphe, nous transformerons une série de cette espèce, en remplaçant m et n par $\varphi(m)$ et $\psi(n)$ et en multipliant le terme général par les dérivées $\varphi'(m)$ et $\psi'(n)$. Voici ce théorème:

Théorème. — Soit $f(z)$ une fonction tendant vers zéro

$$f(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty,$$

et admettant une dérivée continue de l'ordre $m_1 + m_2$ ($m_1 + m_2 \geq 2$), et soient les intégrales

$$\int_0^\infty f(z) dz \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \int_0^\infty |f^{(m_1+m_2)}(t_1 + t_2)| dt_1 dt_2$$

convergentes;

soient $\varphi_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2$, des fonctions croissantes

$$\varphi_\alpha(z) \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \infty,$$

admettant des dérivées continues de l'ordre $m_\alpha + 1$; soient les dérivées

$$\varphi_\alpha^{(i)}(z), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_\alpha + 1,$$

de signes constants; et soient les dérivées d'ordres 1 et m_α bornées

$$|\varphi_\alpha'(z)| < \text{const.}, \quad |\varphi_\alpha^{(m_\alpha)}(z)| < \text{const.}$$

Alors les deux séries doubles

$$\sum_{\infty, \infty} f(x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) \quad \text{et} \quad \sum_{\infty, \infty} f(x + \varphi_1(\nu_1) \omega_1 + \varphi_2(\nu_2) \omega_2) \varphi_1'(\nu_1) \varphi_2'(\nu_2)$$

convergent et divergent en même temps.

L'hypothèse par rapport à la fonction $f(z)$ est précisément celle du théorème du § 16. Par suite, la série et l'intégrale doubles

$$\sum_{\infty, \infty} f(x + \nu_1 \omega_1 + \nu_2 \omega_2) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \int_0^\infty f(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2$$

sont, en même temps, convergentes et divergentes.

Quant à la fonction $\varphi_\alpha(z)$, nous avons supposé qu'elle tend vers l'infini, si l'on fait croître z à l'infini. Or, le signe de $\varphi_\alpha'(z)$ étant constant, la dérivée $\varphi_\alpha'(z)$ est toujours positive. Donc, la fonction $\varphi_\alpha(z)$ croît constamment vers l'infini.

Quant à la dérivée $\varphi_\alpha'(z)$, elle tend vers une limite. Car, par hypothèse, toutes les dérivées sont de signes constants, d'où il s'ensuit qu'elles croissent ou décroissent constamment. Et $\varphi_\alpha'(z)$ étant supposée bornée, elle tendra vers une limite déterminée positive.

Il suffit alors de poser

$$t_\alpha = \varphi_\alpha(\tau_\alpha), \quad \alpha = 1, 2,$$

pour établir l'égalité

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x + t_1 + t_2) dt_1 dt_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2)) \varphi_1'(t_1) \varphi_2'(t_2) dt_1 dt_2.$$

Il nous reste à étudier la relation entre la série et l'intégrale doubles

$$\sum_{x, \infty} f(x + \varphi_1(\nu_1)\omega_1 + \varphi_2(\nu_2)\omega_2) \varphi_1'(\nu_1) \varphi_2'(\nu_2) \text{ et } \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2)) \varphi_1'(t_1) \varphi_2'(t_2) dt_1 dt_2.$$

Dès que nous aurons démontré qu'elles convergent et divergent en même temps, la démonstration de notre théorème sera achevée.

Posons, pour abréger,

$$f(x + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2)) \varphi_1'(t_1) \varphi_2'(t_2) = F(t_1, t_2).$$

$F(t_1, t_2)$ doit donc satisfaire aux conditions du théorème du § 14.

A cet effet, formons les dérivées partielles de $F(t_1, t_2)$. En se rappelant la structure de f , on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = f',$$

ce qui simplifie essentiellement les formules.

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_2'} \frac{\partial F}{\partial t_1} &= f'(\varphi_1')^2 + f \varphi_1''; \\ \frac{1}{\varphi_2'} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} &= f''(\varphi_1')^3 + 3f' \varphi_1' \varphi_1'' + f \varphi_1'''; \\ (33) \quad \frac{1}{\varphi_2'} \frac{\partial^{i_1} F}{\partial t_1^{i_1}} &= f^{(i_1)}(\varphi_1')^{i_1+1} + \sum_{(r)} c_r f^{(r)}(\varphi_1')^{r_1} (\varphi_1'')^{r_2} \dots (\varphi_1^{(i_1+1)})^{r_{i_1+1}}, \end{aligned}$$

$\sum_{(r)}$ renfermant tous les termes à dérivées $f^{(r)}$ des ordres inférieurs à i_1 . En général, la dérivée partielle de l'ordre $i_1 + i_2$ devient

$$\begin{aligned} (34) \quad \frac{\partial^{i_1+i_2} F}{\partial t_1^{i_1} \partial t_2^{i_2}} &= f^{(i_1+i_2)}(\varphi_1')^{i_1+1} (\varphi_2')^{i_2+1} \\ &+ \sum_{(r)} c_r f^{(r+i_2)}(\varphi_1')^{r_1} (\varphi_1'')^{r_2} \dots (\varphi_1^{(i_1+1)})^{r_{i_1+1}} (\varphi_2')^{i_2+1} \\ &+ \sum_{(s)} c_s f^{(i_1+s)}(\varphi_1')^{i_1+1} (\varphi_2')^{s_1} (\varphi_2'')^{s_2} \dots (\varphi_2^{(i_2+1)})^{s_{i_2+1}} \\ &+ \sum_{(r, s)} c_{r, s} f^{(r+s)}(\varphi_1')^{r_1} \dots (\varphi_1^{(i_1+1)})^{r_{i_1+1}} (\varphi_2')^{s_1} \dots (\varphi_2^{(i_2+1)})^{s_{i_2+1}}, \end{aligned}$$

où $\sum_{(r)}$ renferme tous les termes à dérivées partielles de l'ordre i_2 par rapport à t_2 et d'ordre inférieur à i_1 par rapport à t_1 ; $\sum_{(s)}$ a, *mutatis mutandis*, une signification analogue; et $\sum_{(r, s)}$ renferme tous les termes à dérivées partielles des ordres inférieurs aussi bien à i_1 par rapport à t_1 qu'à i_2 par rapport à t_2 .

Cela posé, on voit sans difficulté que la fonction $F(t_1, t_2)$ satisfait aux conditions du théorème du § 14. De son mode de formation et des hypothèses

$$f(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty, \quad \text{et} \quad |\varphi'_\alpha(z)| < \text{const.},$$

il suit d'abord

$$F(t_1, t_2) \rightarrow 0, \quad t_1 \text{ ou } t_2 \rightarrow \infty.$$

Le théorème exige que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t_1, t_2) dt_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

soit convergente. Mais cette intégrale n'est qu'une transformation de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x + t_1 + t_2) dt_\alpha,$$

qui est, par hypothèse, convergente.

Il faut encore démontrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{m_1+m_2} F(t_1, t_2)}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2}} dt_1 dt_2$$

est absolument convergente. La formule (34) nous donne l'expression de la dérivée partielle de l'ordre $m_1 + m_2$. Du premier terme de ce développement vient une intégrale absolument convergente, puisque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m_1+m_2)}(x + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2)) (\varphi_1')^{m_1+1} (\varphi_2')^{m_2+1}| dt_1 dt_2 < C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m_1+m_2)}(x + \varphi_1 + \varphi_2) \varphi_1' \varphi_2'| dt_1 dt_2;$$

et l'on a supposé

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m_1+m_2)}(x + t_1 + t_2)| dt_1 dt_2$$

absolument convergente.

Considérons les intégrales dérivant de la somme double $\sum_{(r,s)}$ de la formule (34)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(r+s)}(\varphi_1')^{r_1} \dots (\varphi_1^{(m_1+1)})^{r_{m_1+1}} (\varphi_2')^{s_1} \dots (\varphi_2^{(m_2+1)})^{s_{m_2+1}}| dt_1 dt_2$$

$$r = 0, 1, \dots, m_1 - 1; \quad s = 0, 1, \dots, m_2 - 1.$$

En observant qu'au moins un des nombres $r_2, r_3, \dots, r_{m_1+1}$ resp. $s_2, s_3, \dots, s_{m_2+1}$ est plus grand que zéro, on obtient, pour cette intégrale, une intégrale majorante

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1^{(\mu)} \varphi_2^{(\nu)}| dt_1 dt_2, \quad \begin{matrix} 2 \leq \mu \leq m_1 + 1 \\ 2 \leq \nu \leq m_2 + 1 \end{matrix}$$

qui converge, puisque les dérivées $\varphi_\alpha^{(i)}(z)$ sont de signes constants et les dérivées $\varphi_\alpha^{(i-1)}(z)$ tendent vers zéro pour $z \rightarrow \infty$. Ce dernier fait est une conséquence

du théorème de M. LITTLEWOOD, les fonctions $\varphi'_a(z)$ et $\varphi_a^{(m)}(z)$ admettant des limites.

Quant aux intégrales dérivant des sommes simples $\sum_{(r)}$ et $\sum_{(s)}$ de la formule (34), on constate de même, sans difficulté, qu'elles sont absolument convergentes.

Exemple. — La fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz^a}}{z^b}, \quad 0 < a \leq 1, \quad b > 0.$$

nous donne les séries doubles

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} \frac{e^{i(m+n)^a}}{(m+n)^b},$$

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} \left(1 + \frac{1}{m \log m \dots \log_{r-1} m}\right) \left(1 + \frac{1}{n \log n \dots \log_{s-1} n}\right) \frac{e^{i(m + \log_r m + n + \log_s n)^a}}{(m + \log_r m + n + \log_s n)^b},$$

convergentes pour $a + b > 1$, divergentes pour $a + b \leq 1$.

On peut donner un théorème de transformation analogue pour des séries multiples.

§ 30. Pour l'application tant de ce théorème que du théorème des paragraphes précédents, il n'est pas sans importance d'indiquer des fonctions présentant les propriétés que nous avons attribuées aux fonctions $\varphi_a(z)$. La fonction exponentielle a déjà été introduite dans le théorème de condensation de CAUCHY. La fonction inverse, le logarithme, admet évidemment les propriétés en question. Nous pouvons, en effet, indiquer toute une classe de fonctions élémentaires satisfaisant à la condition concernant les signes des dérivées, à savoir les fonctions logarithmico-exponentielles.

Ces fonctions, on les obtient par un nombre limité d'opérations algébriques ordinaires combiné avec un nombre limité d'opérations logarithmiques et exponentielles. Une de leurs propriétés fondamentales, c'est qu'elles sont, pour $z > z_0$, de signes constants. Les dérivées d'une fonction logarithmico-exponentielle étant encore des fonctions logarithmico-exponentielles, elles sont également de signes constants.

Quant aux signes des dérivées, on peut dire encore quelques mots. M. HARDY¹ a défini le type $t(z)$ d'une fonction $f(z)$ comme le rapport

$$t(z) \equiv \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Et il a remarqué², en outre, que, $f(z)$ étant une fonction positive et croissante, toutes les dérivées sont, pour $z > z_0$, positives si le type est

$$t(z) > \frac{1}{z};$$

¹ *Orders of infinity*, Cambridge, 1910, p. 38—39.

² *Loc. cit.*, p. 41.

si le type est

$$t(z) > \frac{1}{z},$$

les dérivées sont, pour $z > z_0$, alternativement positives et négatives. On peut ajouter qu'en examinant le cas intermédiaire

$$t(z) \equiv \frac{1}{z},$$

on reconnaîtra que, pour $z > z_0$, un certain nombre des premières dérivées sont positives, tandis que les suivantes sont alternativement positives et négatives.



